半群的模糊理论

谢祥云　吴明芬　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2152.0101)

作者简介



谢祥云，1964年4月26日生，博士、教授．现任广东省江门市五邑大学数学物理系系主任、五邑大学和西北师范大学兼职硕士研究生导师．安徽阜阳师范学院兼职教授，江西赣南师范学院兼职教授，广东省数学会理事，Zentralblatt MATH评论员，广东省“千、百、十”工程省级培养对象．1985年7月毕业于安徽阜阳师范学院数学系，获学士学位．1987年毕业于南昌大学数学系，获硕士学位．1995年毕业于兰州大学数学系，获博士学位．主要从事的研究领域为序代数结构(主要是序半群、序群、序半环、序S-系)、模糊代数(Fuzzy Algebra)．近年来参加和主持省级以上科研项目5项，发表论文30多篇，被SCI收录6篇，出版著作有《序半群引论》(科学出版社，2001)、《线性代数》(华南理工大学出版社，2000)．1998年获“广东省南粤优秀教师”称号，2001年荣获江门市人民政府授予的“江门市十大杰出青年”称号并荣获教育部授予的“全国优秀教师”称号．



ISBN 7-03-014847-9
定 价：32.00 元

半群的模糊理论

谢祥云　吴明芬 著

国家自然科学基金项目
广东省自然科学基金项目
广东省教育厅自然科学基金项目
五邑大学专著出版基金资助

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书较详细地介绍了半群的 Fuzzy 理论和粗糙集理论的基础知识及最新研究成果. 为使读者能全面了解该领域的研究动态, 在必要的地方均加了评述. 全书共分 7 章. 第 1 章介绍 Fuzzy 集理论的基本概念、Fuzzy 集的分解定理和扩张原理; 第 2 章介绍 Fuzzy 子半群定义、性质及基本运算; 第 3 章讨论 Fuzzy 理想及 Fuzzy 理想的生成; 第 4 章讨论各类 Fuzzy 素理想、它们之间的相互关系及其扩张; 第 5 章讨论正则半群的 Fuzzy 同余理论; 第 6 章讨论用 Fuzzy 理想、Fuzzy 左理想、Fuzzy 右理想、Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等刻画正则半群; 第 7 章初步介绍了 Pawlak 粗糙代数理论, 关注了粗糙代数和半群代数理论的结合.

本书可作为数学专业本科高年级学生的选修教材和研究生教材, 也可作为应用数学研究工作者和从事信息科学之软计算、人工智能研究的科研工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

半群的模糊理论/谢祥云, 吴明芬著. --北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-014847-9

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①谢… ②吴… Ⅲ. 半群-模糊集理论 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008442 号

责任编辑: 林 鹏 范庆奎 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 6 月第一次印刷 印张: 13
印数: 1—2 500 字数: 241 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

前　言

半群的代数理论，从它的基本对象、核心概念、主要课题的提出到它的行之有效的方法的建立，都是在数学内部（如它与算子理论、拓扑学、概率论等学科结合相互渗透）和外部（特别是计算机科学）的强烈推动下进行的，至今已开展系统研究近 60 年．特别是近几十年新兴学科如形式语言与自动机理论、码论等交叉发展的需要，使得半群理论的发展非常迅速．研究有序代数结构的关键问题之一是序结构，在有序代数结构中，序结构有两类，一类是外在的，另一类是内在的，即在代数结构中引入内部序结构使之成为序代数，利用序的方法和工具研究代数系统的特征．因此序半群的研究也就成为半群理论的一个重要方面． Clifford 和 Preston (1961~1967) 所撰的两卷《半群的代数理论》(The Algebraic Theory of Semigroups) 和 L Fuchs 1961 年用俄文撰写的《偏序代数系》(后在 1963 年被译成德文和英文再次出版) 均被国际数学界公认为数学经典著作之一． Springer 出版的《半群论坛》(Semigroup Forum) 自 20 世纪 70 年代创刊至今已成为国际上著名的学术刊物之一．我国学者自 70 年代末在郭聿琦教授等的带领下由组合半群及序群入手开展系统研究，至今每年在国内外发表学术论文近 200 篇并有 20 多所高校在培养该领域的博士生和硕士生．已经由科学出版社出版了三本专著：刘仲奎教授的《半群的 S- 系理论》、喻秉钧教授的《半群的双序集理论》和本书作者的《序半群引论》．

模糊数学是一门崭新的数学分支， Lotfi Zadeh 在他的论文《 Fuzzy Sets 》中提出了一个非常基本的概念 "Fuzzy set"(将 "Fuzzy" 译为 "模糊" 在中文中产生了很多歧义，在本书的正文中我们将保留 Fuzzy 一词不译) 之后，在当时一些很有影响的科学家与数学家中产生了较强的负面影响．与此同时，它也吸引了一大批科学家的注意力．他们主要来自两个方面：一方面来自工程技术人员，他们想挖掘 Fuzzy 集理论在实践中的应用；另一方面来自理论家，他们认识到利用 Fuzzy 集的思想在数学领域可以开辟一些新的研究方向．事实上， Fuzzy 集理论正是沿着这两条线在发展．就理论研究而言， Fuzzy 集最基本的研究是建立各种经典数学结构的有意思 Fuzzy 副本，希望得到和创造一个羽翼丰满的模糊数学世界，我们当然是假设这些数学理论研究将来在实践中能被利用，但是这不是理论研究者起初最关心的问题．早在 1960 至 1980 年间， Fuzzy 理论研究主要集中在 Fuzzy 拓扑空间、 Fuzzy 自动机和各种动力系统、 Fuzzy 群和 Fuzzy 形式语言． Fuzzy 数学理论一个较大的发展是在 1980 年之后，这主要得益于模糊数学在应用领域的作为，特别是在日本的成功．对模糊数学理论的研究，中国和印度在国际上是领先的．即

使在 20 世纪 80 年代，西方也均是落后的．但 1990 年以后，在 John Mordeson 的带领下，他和他的 Creighton 大学模糊数学与计算机科学研究中心在模糊代数理论方面做出了令人瞩目的工作，也许最能说服人的恐怕就是他的两本书，《 L- 子空间与 L- 子域》 (L-Subspaces and L-Subfields) 和 1994 年出版的《 L- 代数引论》 (Elements of L-Algebra). 1971 年，在 Rosenfeld 引入 Fuzzy 子群之后，标志着 Fuzzy 代数研究的开始．1982 年， Liu 进一步引入群 G 的 Fuzzy 不变子群，环的 Fuzzy 理想等概念促使 Fuzzy 代数研究进一步深入到各代数分支的方方面面．例如 Fuzzy 子群、 Fuzzy 子环、 Fuzzy 子域、 Fuzzy 子格、 Fuzzy 模、 Fuzzy 代数等等． 1980 年， Kuroki 正式开始 Fuzzy 子半群的研究，它是自 Fuzzy 代数研究开始以来，模糊数学领域最活跃的研究领域之一 (包括 Fuzzy 子群，因为半群分类为 20M).

作为处理不确定信息的另一个有力工具，粗糙集 (Rough Set) 是波兰数学家 Z. Pawlak 于 1982 年提出的 (为开发自动规则生成系统及研究软计算问题而引入), 研究地域也局限在东欧一些国家，直到 80 年代末才引起各国学者的注意．90 年代初，人们才逐渐认识到它的意义. RS 理论主要兴趣在于它恰好反映了人们用 Rough 集方法处理不分明问题的常规性，即以不完全信息或知识去处理一些不分明现象的能力，或依据观察、度量到的某些不确定的结果而进行分类数据的能力．由于计算机与网络信息技术的飞速发展使得各个领域的数据和信息急剧增加 (信息爆炸), 并且由于人类的参与使数据与信息系统中的不确定性更加显著 (复杂系统), 如何从大量的、杂乱无章的、强干扰的数据 (海量数据) 中挖掘潜在的、有利用价值的信息 (有用知识), 这给人类的智能信息处理能力提出了前所未有的挑战．由此产生了人工智能研究的一个崭新领域 —— 数据挖掘 (DM) 和数据库知识发现 (KDD). 在 DM 和 KDD 的诸多方法中，粗糙集理论与方法对于处理复杂系统不失为一种较为有效的方法，因为它与概率方法、模糊集方法和证据理论方法等其他处理不确定性问题理论的最显著的区别是它无需提供问题所需处理的数据集合之外的任何先验信息．由于在机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统、归纳推理和模式识别等方面的广泛应用，它现已成为一个热门的研究领域．有关粗糙集的理论及应用的文章在主要的计算机类、信息类、系统科学类和有关工程类杂志均可见到．粗糙集理论在中国成为热点的时间只有短短的八九年．粗糙集理论的核心是粗糙代数、粗糙逻辑以及粗糙集的公理化表示等．

半群的代数理论和不确定数学、信息科学及人工智能的软计算领域的交叉和融合，给代数学的研究提供了新的广阔的舞台，同时也给代数学理论提供了深刻的应用背景．在这样的背景下，本书的完成是非常自然的．本书试图全面地综述一下半群的模糊理论在近二十几年的发展历程，同时对今后该领域的发展提出了作者的看法，几乎在每章的结尾均加了一个评注以便读者开阔视野．从发展的轨迹来看，同时也是为了使初学者能走一条基本的、成熟的道路，我们主要从半群的模糊

同余理论与半群的模糊子系统理论 (包括模糊子半群、模糊理想、模糊正则子半群等) 这两条主线以及半群的粗糙集理论来观察分析. 尽管在 20 世纪六七十年代以来在半群代数理论研究的某些方向有一些专著出版, 但迅速发展起来的半群代数理论与其他学科的交叉有必要较为系统地介绍给广大科研工作者.

本书是在作者开设的研究生课程 "半群的 Fuzzy 理论" 的讲义的基础上改编而成的. 全书共分 7 章. 第 1 章介绍 Fuzzy 集理论的基本概念、 Fuzzy 集的分解定理和扩张原理; 第 2 章介绍 Fuzzy 子半群定义、性质及基本运算; 第 3 章讨论 Fuzzy 理想及 Fuzzy 理想的生成; 第 4 章讨论各类 Fuzzy 素理想, 它们之间的相互关系及其扩张; 第 5 章讨论了正则半群的 Fuzzy 同余理论; 第 6 章讨论用 Fuzzy 理想、 Fuzzy 左理想、 Fuzzy 右理想、 Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等刻画正则半群; 第 7 章初步介绍了 Pawlak 粗糙代数理论, 关注了粗糙代数和半群代数理论的结合.

作者衷心感谢导师戴执中教授、郭聿琦教授和漆芝南教授多年来的指导、帮助和鼓励. 在南昌大学 (原江西大学) 打下的较宽厚的代数基础对培养我广泛的代数学术兴趣无疑是非常有益的. 感谢导师郭聿琦教授对我的关心和爱护, 是他给了我一个更宽的学术视野, 更高的学术境界. 感谢我的师兄弟们, 他们给了我在学术成长过程中很多美好的时光.

由于作者的知识和水平所限, 书中难免有错误或取材不当之处, 敬请读者批评指正.

谢祥云

2004 年 9 月 20 日于广东江门

目　录

第 1 章　Fuzzy 集理论的基本概念

在本章中我们仅仅提供一些本书其他章节讨论半群的 Fuzzy 理论所需要的关于 Fuzzy 集的基本知识，介绍 Fuzzy 集研究两个最基本的结论：分解定理与扩张原理．介绍基于普通集 X 的 Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 等价类．

1.1　Fuzzy 子集

除非特别说明，L 总是表示至少有两个元的完备的完全分配格．L 的最大元与最小元分别用 1 和 0 表示，L 上的交、并与偏序关系分别记为 $\vee$ 、$\wedge$ 和 $\leqslant$. 如果 $L=[0,1]$, 则 L 关于通常的序关系及 min, max 运算 (也即 $\wedge$ 与 $\vee$ 运算) 是一个完备的完全分配格．我们知道，经典集合 X 的任意子集 A 可以定义一个函数 $f_A: X \to \{0,1\}$, 即

$$(\forall x \in X)\ \ f_A(x)=\begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

该函数称为 A 的 *特征函数*. Fuzzy 集合论的创始人 L A Zadeh 在 1965 年将 A 的特征函数加以推广，以 $[0,1]$ 区间代替 $\{0,1\}$, 给出了隶属函数的概念，引入了 Fuzzy 子集的概念 (中文现译为模糊子集).

1.1.1 定义　设 X 为非空集．任意一个从 X 到区间 $[0,1]$ 的映射 μ 称为 X 的 *Fuzzy 子集*.

记从 X 到 $[0,1]$ 的所有映射集为 $[0,1]^X$, $[0,1]^X$ 即为 X 上的所有 Fuzzy 子集集 (有时也记为 $F(X)$). 特别地，如果将 $[0,1]$ 换为 $\{0,1\}$, 则 $\{0,1\}^X$ 与 X 的幂集一一对应．显然，$\{0,1\}^X \subset [0,1]^X$. 如果一个 F 子集 $\mu \notin \{0,1\}^X$, 称 μ 为 X 的 *真 Fuzzy 子集*. 从定义我们看出，设 $\mu \in F(X)$, 如果我们称 $\{x \mid \mu(x)>0, x \in X\}$ 为 μ 的 *承载集*(记为 supp$X$), 则 $\forall x \in X$, $\mu(x)$ 反映了 x 从属于 supp$X$ 的隶属程度．如果 $\mu(x)=0$, 说明 $x \notin$ supp$X$; $\mu(x)$ 的值越大，说明 x 隶属于 supp$X$ 的程度越大，这不像 X 的经典子集 X_1, 对 X 的任意元素，要么属于 X_1, 隶属 X_1 的值为 1; 要么不属于 X_1, 隶属 X_1 的为 0. 所以 Fuzzy 子集我们也可能用一个元素偶来表示，即 $(x,\mu(x)), \forall x \in X$.

1.1.2 例　设 $X=[0,120]$, μ 表示 “年轻”，ν 表示 “年老”，则 μ 和 ν 可分别定义为：

$$\mu(x)=\begin{cases}\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 120;\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 25.\end{cases}$$

$$\nu(x)=\begin{cases}\left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 120;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 50.\end{cases}$$

1.1.3 定义　设 $Y\subseteq X$, $\lambda\in[0,1]$. 我们定义 $Y_\lambda\in F(X)$ 如下：

$$Y_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in Y;\\ 0, & x\in X\setminus Y.\end{cases}$$

特别地，如果 Y 是*孤立点* $\{y\}$, 则 $\{y\}_\lambda$ (我们记为 y_λ) 就是通常所说的 Fuzzy 点.

1.1.4 定义　设 $\mu,\nu\in F(X)$. 如果 $\mu(x)\leqslant\nu(x)$, $\forall x\in X$, 称 ν 包含 μ, 记 $\mu\leqslant\nu$; 如果 $\mu\leqslant\nu$, $\mu\neq\nu$, 称 ν 真包含 μ, 记 $\mu<\nu$.

显然，$F(X)$ 关于上定义的包含关系 $\leqslant$ 构成一个偏序集 $(F(X),\leqslant)$.

1.1.5 定义　设 $\mu,\nu\in F(X)$. 定义 $\mu\cup\nu,\mu\cap\nu$ 如下：

$$(\forall x\in X)\quad (\mu\cup\nu)(x)=\mu(x)\vee\nu(x),$$
$$(\mu\cap\nu)(x)=\mu(x)\wedge\nu(x),$$

则 $\mu\cup\nu$ 与 $\mu\cap\nu$ 分别称为 μ 与 ν 的并与交.

1.1.6 定理　设 X 为非空集，则 $(F(X),\leqslant)$ 关于以上定义的并与交运算构成完备的完全分配格且 X_1 为最大元，X_0 为最小元. 进一步地，$[0,1]$ 可以同构地嵌入 $(F(X),\leqslant)$.

证明留给读者练习.

一般地，设 I 为指标集，$\{\mu_i|i\in I\}$ 为 X 的 Fuzzy 子集簇，则它们的最小上界 $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i$ 和最大下界 $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i$ 关于以下定义仍为 $F(X)$ 的元素.

$$(\forall x\in X)\quad \left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\bigvee_{i\in I}\mu_i(x),\quad \left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\bigwedge_{i\in I}\mu_i(x)$$

当 $|I|<\infty$ 时，例如 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，我们记

$$\bigcup_{i\in I}\mu_i=\mu_1\cup\mu_2\cup\cdots\cup\mu_n,\quad \bigcap_{i\in I}\mu_i=\mu_1\cap\mu_2\cap\cdots\cap\mu_n$$

我们需要说明的是，在定理 1.1.6 中，$[0,1]$ 可同构嵌入 $(F(X),\leqslant)$ 的方式不是唯一的，例如

$$f_\lambda:\lambda\to y_\lambda,\ \forall\lambda\in[0,1],\ y\in X$$

是 $[0,1]$ 到 $(F(X),\leqslant)$ 的嵌入映射，y 不同可得到不同的嵌入映射.

1.1.7 定义　设 $\mu\in F(X)$, $\lambda\in[0,1]$.

$$\mu_\lambda=\{x\in X\mid\mu(x)\geqslant\lambda\}$$

称为 μ 的 λ-截集(λ-cut, 也称 λ- 水平集 (λ-level)). 如果将 μ_λ 中的 $\geqslant$ 换成 $>$, 在不空的前提下，称 $\mu_\lambda{}^{>}=\{x\in X\mid\mu(x)>\lambda\}$ 为 μ 的 λ-强截集.

设 $\mu,\nu\in F(X)$, $\forall\lambda\in[0,1]$. 不难验证下列各款成立：

(1) $\mu\leqslant\nu\Rightarrow\mu_\lambda\subseteq\nu_\lambda$;

(2) $\lambda_1\leqslant\lambda_2\Rightarrow\mu_{\lambda_1}\subseteq\nu_{\lambda_2}$;

(3) $\mu=\nu\Leftrightarrow\mu_\lambda=\nu_\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$.

下面两个定理给出了截集的基本性质，读者可以自行证明.

1.1.8 定理　设 $\{\mu_i\mid i\in I\}\subseteq F(X)$, 则

(1) $(\forall\lambda\in[0,1])\ \bigcup\limits_{i\in I}(\mu_i)_\lambda\subseteq(\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)_\lambda$;

(2) $\bigcap\limits_{i\in I}(\mu_i)_\lambda\subseteq(\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i)_\lambda$.

当 $|I|<\infty$ 时，则 (1) 式等式成立.

1.1.9 定理　设 $\mu\in F(X)$, $\{\lambda_i\mid i\in I\}\subseteq[0,1]$, 设 $b=\bigwedge\limits_{i\in I}\lambda_i$, $c=\bigvee\limits_{i\in I}\lambda_i$, 则

(1) $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_{\lambda_i}\subseteq\mu_b$;

(2) $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_{\lambda_i}=\mu_c$.

1.1.10 定理 (分解定理)　设 $\mu\in F(X)$, 则

$$\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda=\bigcup_{\lambda\in Im\mu}(\mu_\lambda)_\lambda.$$

证　设 $x\in X$, 则

$$\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda\right)(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\in L|\lambda\leqslant\mu(x)\}=\mu(x).$$

因此，

$$\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda.$$

同理，可以得出 $\mu=\bigcup\limits_{\lambda\in Im\mu}(\mu_\lambda)_\lambda$. 证毕.　□

1.1.11 定义　设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为非空集簇，X 为 $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的卡氏积，即

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i, i \in I\}.$$

设 $\mu_i \in F(X_i), i \in I$, 则定义 $F(X)$ 的一个元素 μ 如下：

$$(\forall x \in X)\ \ \mu(x) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x_i),$$

μ 称为 $\{\mu_i \mid i \in I\}$ 的 完全直积(complete direct product). 记 $\mu = \widetilde{\prod_{i\in I}}\mu_i$. 如果 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则

$$X = X_1 \otimes X_2 \cdots X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

μ 可写成

$$\mu = \widetilde{\prod_{i\in I}}\mu_i = \mu_1 \widetilde{\otimes} \mu_2 \cdots \mu_n.$$

从定义 1.1.11 中我们看出，如果 $\mu_i, \nu_i \in F(X), i \in I$ 且 $\mu_i \leqslant \nu_i$, 则

$$\widetilde{\prod_{i\in I}}\mu_i \leqslant \widetilde{\prod_{i\in I}}\nu_i$$

1.1.12 定义 (扩张原理)　设 X 与 Y 为两个非空集合，Fuzzy 是 X 到 Y 的映射且 $\mu \in F(X)$, $\nu \in F(Y)$. 定义两个 Fuzzy 子集 $f(\mu) \in F(Y)$, $f^{-1}(\nu) \in F(X)$ 如下：

$$(\forall y \in Y)\ \ f(\mu)(y) = \bigvee\{\mu(x) | x \in X, f(x) = y\},$$

$$(\forall x \in X)\ \ f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)).$$

$f(\mu)$, $f^{-1}(\nu)$ 分别称为 μ 在 f 下的象和 ν 在 f 下的原象或逆象. 在 $f(\mu)$ 的定义中，如果 $f^{-1}(y) = \emptyset$, 规定空集的最小上确界为 0.

1.1.13 定理　设 f 为 X 到 Y, g 为 Y 到 Z 的映射，则下列各款成立：

(1) 设 $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq F(X)$, 则 $f(\bigcup_{i\in I} \mu_i) = \bigcup_{i\in I} f(\mu_i)$. 因此，

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \leqslant f(\mu_2), \forall \mu_1, \mu_2 \in F(X).$$

(2) 设 $\{\nu_j \mid j \in J\} \subseteq F(Y)$, 则

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} \nu_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j),\quad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} \nu_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j).$$

因此,

$$\nu_1 \leqslant \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \leqslant f^{-1}(\nu_2), \forall \nu_1, \nu_2 \in F(Y).$$

(3) $f^{-1}(f(\mu)) \geqslant \mu, \forall \mu \in F(X)$. 特别地, f 为单射时, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu, \forall \mu \in F(X)$. 这时, $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的单射, $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的满射.

(4) $f(f^{-1}(\nu)) \leqslant \nu, \forall \nu \in F(Y)$. 特别地, f 为满射时, $f(f^{-1}(\nu)) = \nu, \forall \nu \in F(Y)$. 这时, $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的满射, $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的单射.

(5) $f(\mu) \leqslant \nu \Leftrightarrow \mu \leqslant f^{-1}(\nu), \forall \mu \in F(X), \forall \nu \in F(Y)$.

(6) $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu), \forall \mu \in F(X)$ 且 $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi), \forall \xi \in F(Z)$.

证　(1) 和 (2) 容易证得. 设 $\mu \in F(X)$, 则

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)) \\ &= \bigvee \{\mu(x') | x' \in X, f(x') = f(x)\} \\ &\geqslant \mu(x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

特别地, 如果 f 是单射, 则

$$\bigvee \{\mu(x') | x' \in X, f(x') = f(x)\} = \mu(x), \forall x \in X.$$

因此, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$. 又如果 $f(\mu) = f(\mu_1)$, 则 $f^{-1}(f(\mu)) = f^{-1}(f(\mu_1))$, 即 $\mu = \mu_1$. 因此 $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的单射. 又任取 $\mu \in F(X)$, 则存在 $f(\mu) \in F(Y)$ 使得 $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$. 因此 $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的满射. 这就完成了 (3) 的证明.

(4) 设 $\nu \in F(Y)$, 则

$$\begin{aligned} (\forall y \in Y) \quad f(f^{-1}(\nu))(y) &= \bigvee \{f^{-1}(\nu)(x) | x \in X, f(x) = y\} \\ &= \bigvee \{\nu(f(x)) | x \in X, f(x) = y\} \\ &= \begin{cases} \nu(y), & y \in f(X) \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \\ &\leqslant \nu(y). \end{aligned}$$

如果 f 是满射, 则 $(\forall y \in Y)\ f(f^{-1}(\nu))(y) = \nu(y)$, 即 $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$. 进一步地, 任意取 $\nu \in F(Y)$, 则从 $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ 得 $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的满射; 又如果 $f^{-1}(\nu_1) = f^{-1}(\nu)$, 则 $\nu_1 = f(f^{-1}(\nu_1)) = f(f^{-1}(\nu)) = \nu$. 因此 $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的单射.

由 (1) 至 (4), 很容易得出 (5) 成立.

(6) 因为对任意的 $z \in Z$ 和 $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\forall \mu \in F(X))\ g(f(\mu))(z) &= \bigvee\{f(\mu)(y) | y \in Y, g(y) = z\}\\ &= \bigvee\{\bigvee\{\mu(x) | x \in X, f(x) = y\} | y \in Y, g(y) = z\}\\ &= \bigvee\{\mu(x) | x \in X, (g \circ f)(x) = z\}\\ &= (g \circ f)(\mu)(z), \forall z \in Z.\\ (\forall \xi \in F(Z))\ (g \circ f)^{-1}(\xi)(x) &= \xi((g \circ f)(x)) = \xi(g(f(x)))\\ &= g^{-1}(\xi)(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(\xi))(x), \forall x \in X.\end{aligned}$$

因此 (6) 成立. 证毕. □

1.2 格值子集与范算子

在 Fuzzy 子集的定义中, 我们选取 $[0,1]$ 区间作为 Fuzzy 子集集的取值范围是有它们的实际背景的, 因为一个变量从 0 渐变到 1 正好反映一个实际背景下量的从无到完美的过程. 如果我们进一步抽象, 将 $[0,1]$ 换成格或其他代数系统, 就可以得出和 Fuzzy 子集类似的性质.

1.2.1 定义 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, $A \subset X, a \in X$. a 称为 A 的 *上界*, 若 $\forall x \in A, x \leqslant a$. 如果 A 有一最小上界 a, 即 a 为 A 的上界且对 A 的任一上界 b, 总有 $a \leqslant b$. 这时 a 称为 A 在 X 中的 *上确界*, 记作 $a = \sup_X A$, 不致引起混淆时, 简记 $a = \sup A$ 或 $\bigvee A$.

对偶地, 可以定义 A 的 *下界* 和 *下确界* $\inf A$ 或 $\bigwedge A$.

在定义 1.2.1 中, 如果 $A = \emptyset$, 则 X 中任何元均为 A 的上界和下界. 如果 X 有最大元 1 和最小元 0, 则 0 为 $\emptyset$ 的上确界, 1 为 $\emptyset$ 的下确界, 即 $\sup\emptyset = 0$, $\inf\emptyset = 1$.

1.2.2 定义 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, 若对 X 中任意两个元 a, b 均有 $\sup\{a, b\}$ 和 $\inf\{a, b\}$ 存在, 称 $(X, \leqslant)$ 为 *格*, 这时 $\sup\{a, b\}$ 和 $\inf\{a, b\}$ 可分别简记为 $a \vee b, a \wedge b$. 一个格称为 *完备格*, 如果 $\forall A \subseteq X$, $\sup A$ 和 $\inf A$ 均存在.

显然一个完备格一定存在最大元 (记为 1) 和最小元 (记为 0).

1.2.3 定义 设 L 是完备格. 如果以下两个等式成立, 称 L 为 *完全分配格* (completely distribute lattice):

$$\bigwedge_{i \in I}\left(\bigvee_{j \in J} a_{ij}\right) = \bigvee_{f \in J^I}\left(\bigwedge_{i \in I} a_{if(i)}\right), \quad \bigvee_{i \in I}\left(\bigwedge_{j \in J} a_{ij}\right) = \bigwedge_{f \in J^I}\left(\bigvee_{i \in I} a_{if(i)}\right).$$

1.2.4 注 格的完全分配性在表述上还有一个形式, 即上式中 I 和 J 似乎没有关系. 但一般情况下, 不同的 $i_0 \in I$, $\bigvee_{j \in J} a_{i_0 j}$ 中 J 的基数不一定相同. 例如

$I=\{0,1\}$，下列两式：

$$(a_{11}\wedge a_{12})\vee(a_{21}\wedge a_{22})=\bigvee_{i\in\{1,2\}}\left(\bigwedge_{j\in\{1,2\}}a_{ij}\right).$$

但 $(a_{11}\wedge a_{12})\vee(a_{21}\wedge a_{22}\wedge a_{23})$ 在表述时只有写成

$$\bigvee_{i\in\{1,2\}}\left(\bigwedge_{j\in J_i}a_{ij}\right),\ \text{其中 } J_1=\{1,2\},J_2=\{1,2,3\}.$$

所以在完全分配性的定义时，我们给出另外一种表述：

$$\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}\right)=\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}\left(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}\right)$$

及其对偶. 这里 $a_{ij}\in L$, $I\neq\emptyset$, $J\neq\emptyset$. 当然这种陈述和定义 1.2.3 是等价的且定义 1.2.3 中两等式仅一条成立即可.

1.2.5 例 (1) 设 $L=[0,1]$, 则 L 关于通常的序关系是一个完备格且是完全分配的. 设 $X\neq\emptyset$, 则 X 的幂集 2^X 关于通常集合包含关系是完全分配格.

(2) L 为数轴 R 上的一切开集之集关系集合的包含关系构成的完备格. 取 $A=(0,1)$, $B_n=\left(1-\dfrac{1}{n},2\right)$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$\begin{aligned}A\bigvee\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty}B_n\right)&=A\bigcup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)^{\circ}\\&=(0,1)\cup[1,2)^{\circ}\\&=(0,1)\cup(1,2).\end{aligned}$$

这里 K° 表示集合 K 的内部， $\forall K\subseteq R$. 但

$$\begin{aligned}\bigwedge_{n=1}^{\infty}(A\bigvee B_n)&=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left((0,1)\bigcup(1-\frac{1}{n},2)\right)\right)^{\circ}\\&=\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2\right)\right)\bigcup(0,1)\right)^{\circ}\\&=(0,2)^{\circ}=(0,2),\end{aligned}$$

因此 L 不是完全分配格.

1.2.6 定义 设 X 为非空集合, L 为完全分配格. L^X 中的任意元素 μ 称为 X 的 LF 子集 (lattice fuzzy subset).

1.2.7 注　X 的 Fuzzy 子集是特殊的 LF 子集，可以将第一节所讨论的一切性质及分解定理与扩张原理推广到 LF 子集上.

为了使 Fuzzy 集合适合于不同的 Fuzzy 现象，Zadeh 提出的 $\vee, \wedge$ 算子不一定和某些 Fuzzy 现象吻合，对此人们相继提出了不少新算子，统称为 Fuzzy 算子，它们各有优缺点，下面对常见的几种 Fuzzy 算子作简单介绍.

设 $I=[0,1]$，I 上的任意二元运算均为 $I\times I$ 到 I 的映射．$\forall a,b\in[0,1]$.

(1) Zadeh 算子：$\vee:(a,b)\to a\vee b$, $\wedge:(a,b)\to a\wedge b$;

(2) 最大与乘积算子：$\vee$ 同 (1), 乘积为普通实数乘法 (以此来取代 Zadeh 算子中的 $\wedge$);

(3) 代数和与乘积算子：将 (1) 中第一个算子换为 $\oplus:(a,b)\to a+b-ab=1-(1-a)(1-b)$, 第二个算子换为普通实数乘法;

(4) 有界和与积算子：

$$\vee_+:(a,b)\to(a+b)\wedge 1,\ \wedge_\bullet:(a,b)\to 0\vee(a+b-1);$$

(5) Einstein 算子：

$$E_+\cdot(a,b)\to\frac{a+b}{1+ab},\quad E_\bullet:(a,b)\to\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)};$$

(6) Yager 算子：

$$Y_+:(a,b)\to 1\wedge(a^\alpha+b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\alpha\in[1,\infty),$$

$$Y_\bullet:(a,b)\to 1-1\wedge[(1-a)^\alpha+(1-b)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}};$$

(7) Hamacher 算子：

$$H_+:(a,b)\to\frac{(a\oplus b)-(1-\gamma)ab}{\gamma+(1-\gamma)(1-ab)},\gamma\in[0,\infty),$$

$$H_\bullet:(a,b)\to\frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\oplus b)}.$$

一般地，概括它们的共性，可总结出更一般的形式.

1.2.8 定义　设 $T:[a,b]^2\to[0,1]$. 如果映射 T 满足：$\forall a,b\in[0,1]$,

(1) $T(a,b)=T(b,a)$;

(2) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$;

(3) 如果 $a\leqslant a_1$,$b\leqslant b_1$, 则 $T(a,b)\leqslant T(a_1,b_1)$;

(4) $T(1,a)=a$;

则 T 称为三角模, 也称 T范数 (triangular norm 或 t-norm).

例如，$\forall x,y\in[0,1]$，定义：

(a) $T_1(x,y)=\min(x,y)$;

(b) $T_2(x,y)=\max(x+y-1,0)$;

(c) $T_3(x,y)=\mathrm{prod}(x,y)=xy$;

它们均为 T 范数.

1.2.9 注 如果 S 为 $[0,1]$ 上的二元运算，满足定义 1.2.8 中的 (1), (2) 和 (3)，且满足

(4)′ $S(0,a)=a,\forall a\in[0,1]$.

S 称为 *S范数* (s-norm).

1.2.10 定义 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，N 称为 伪补(negation)，如果 N 满足：

(1) $N(N(x))=x,\forall x\in[0,1]$;

(2) $N(x)\leqslant N(y),y\leqslant x,x,y\in[0,1]$.

可以证明 N 是 $[0,1]$ 上的单调下降连续函数 (关于 $[0,1]$ 上的通常拓扑)，且 $N(0)=1,N(1)=0$.

1.2.11 定理 设 T 为 T 范数，N 为伪补，则存在 $[0,1]$ 上的唯一 S 范数 S 使得

$$N(T(x,y))=S(N(x),N(y)),\forall x,y\in[0,1].$$

证 $\forall a,b\in[0,1]$，定义 $S:[0,1]^2\to[0,1]$ 为 $S(a,b)=N(T(a),N(b))$，则 $S(a,b)=S(b,a)$，且

$$\begin{aligned}S(S(a,b),c)&=N(T(N(S(a,b)),N(c)))\\&=N(T(N(T(N(a),N(b)))),N(c))\\&=N(T(T(N(a),N(b)),N(c)))\\&=N(T(N(a),T(N(b),N(c))))\\&=S(a,S(b,c)).\end{aligned}$$

因此 S 是交换和结合的，显然

$$S(0,a)=N(T(N(0),N(a)))=N(T(1,N(a)))=N(N(a))=a.$$

又设 $a\leqslant b$，则 $N(b)\leqslant N(a)$，因此 $T(N(b),N(c))\leqslant T(N(a),N(c)),\forall c\in[0,1]$，从而

$$S(a,c)=N(T(N(a),N(c)))\leqslant N(T(N(b),N(c)))=S(b,c).$$

以上证明了 S 为 $[0,1]$ 上的 S 范数.

另一方面，设 S_1 为 $[0,1]$ 上的另一个 S 范数且满足：

$$N(T(x,y))=S_1(N(x),N(y)),\forall x,y\in[0,1],$$

则

$$S_1(a,b) = S_1(N(N(a),N(N(b)))) \\ = N(T(N(a),N(b))) = S(a,b), \forall a,b \in [0,1].$$

这证明了 S 是唯一的. 证毕. □

1.2.12 注 基于以上定理，S 范数我们也称之为 T 范数的 N 对偶. 另一方面，定理 1.2.10 的对偶也成立，即设 S 为 S 范数，唯一地存在一个 T 范数 T 使得

$$N(S(x,y)) = T(N(x),N(y)), \forall x,y \in [0,1].$$

因此 T 范数也称为 S 范数的 N 对偶. 事实上，由 S 范数和伪补 N, 定义 $[0,1]$ 上的 T 范数：

$$T(a,b) = N(S(N(a),N(b))), \forall a,b \in [0,1].$$

这样的 T 即满足以上要求.

1.2.13 定义 设 T_1 和 T_2 是两个 T 范数. 称 T_1强于T_2 (记 $T_1 \geqslant T_2$), 如果 $T_1(x,y) \geqslant T_2(x,y), \forall x,y \in [0,1]$, 称 T_1控制 T_2(记 $T_1 \gg T_2$), 如果 $\forall a,b,c,d \in [0,1]$,

$$T_1(T_2(a,b),T_2(c,d)) \geqslant T_2(T_1(a,c),T_1(b,d)).$$

1.2.14 例 设 Z 和 M 为 $[0,1]$ 上的二元运算，$Z(x,1) = x$, $Z(1,y) = y$, 且 $Z(x,y) = 0$, $x,y \neq 1$, $M(x,y) = x \wedge y$, $\forall x,y \in [0,1]$, 则 Z 与 M 均为 $[0,1]$ 上的 T 范数，且对任何 T 范数 T, 有

$$T \geqslant Z, M \gg T \gg Z, T \leqslant M.$$

1.3 Fuzzy 等价关系

设 X,Y 是非空集合. 如果 $\mu \in F(X \times Y)$, 称 μ 为 X 到 Y 的 Fuzzy 关系, 显然，设 R 为 X 到 Y 的关系，定义 $\mu_R(x,y) = 1$, $(x,y) \in R$; 否则, $\mu_R(x,y) = 0$, 则 μ_R 为 X 到 Y 的 Fuzzy 关系，即 R 是一个特殊的 Fuzzy 关系，以后我们主要讨论 $X = Y$ 的情形，这时 $F(X \times X)$ 中的元素称为 X 上的 Fuzzy 关系.

1.3.1 定义 设 μ 为 X 上的 Fuzzy 关系. μ 称为 Fuzzy 自反的, 如果 $\mu(x,x) = 1, \forall x \in X$; μ 称为 Fuzzy 对称的, 如果 $\mu(x,y) = \mu(y,x), \forall x,y \in X$.

1.3.2 定义 设 μ_1, μ_2 为 X 上的 Fuzzy 关系. 定义 μ_1 与 μ_2 的合成 (记为 $\mu_1 \circ \mu_2$) 如下：

$$\mu_1 \circ \mu_2(x,y) = \bigvee_{z \in X} (\mu_1(x,z) \wedge \mu_2(z,y)), \forall x,y \in X.$$

如果 $\mu_1=\mu_2=\mu$, 且 $\mu\circ\mu\leqslant\mu$, 称 μ 是 Fuzzy 可传的.

1.3.3 注 X 上有几个特殊的 Fuzzy 关系定义如下: $\triangle_X: X\times X\to I$, $\triangle_X(x,y)=0, x\neq y$; $\triangle_X(x,y)=1, x=y$. 另一个 Fuzzy 关系 ∇_X 定义为 $\nabla_X(x,y)=1, \forall x,y\in X$. 当然 X 上还有零 Fuzzy 关系 O, 即 $O(x,y)=0, \forall x,y\in X$.

1.3.4 定理 设 μ_1,μ_2,μ_3 为 X 上的 Fuzzy 关系, 则 $(\mu_1\circ\mu_2)\circ\mu_3=\mu_1\circ(\mu_2\circ\mu_3)$ 且 $\triangle_X\circ\mu=\mu\circ\triangle_X=\mu, \forall\mu\in F(X\times X)$.

证 设 $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in F(X\times X), \forall x,y\in X$, 则

$$\begin{aligned}((\mu_1\circ\mu_2)\circ\mu_3)(x,y)&=\bigvee_{z\in X}((\mu_1\circ\mu_2)(x,z)\wedge\mu_3(z,y))\\&=\bigvee_{z\in X}\bigvee_{t\in X}(\mu_1(x,t)\wedge\mu_2(t,z)\wedge\mu_3(z,y))\\&=\bigvee_{t\in X}\bigvee_{z\in X}(\mu_1(x,t)\wedge(\mu_2(t,z)\wedge\mu_3(z,y)))\\&=\bigvee_{t\in X}(\mu_1(x,t)\wedge(\mu_2\circ\mu_3)(t,y))\\&=(\mu_1\circ(\mu_2\circ\mu_3))(x,y).\end{aligned}$$

因此, $(\mu_1\circ\mu_2)\circ\mu_3=\mu_1\circ(\mu_2\circ\mu_3)$.

进一步地, 设 $\mu\in F(X\times X)$, 则

$$\begin{aligned}(\triangle_X\circ\mu)(x,y)&=\bigvee_{t\in X}(\triangle_X(x,t)\wedge\mu(t,y))\\&=\mu(x,y)=(\mu\circ\triangle_X)(x,y).\end{aligned}$$

因此, $\triangle_X\circ\mu=\mu\circ\triangle_X=\mu$. 证毕. □

1.3.5 注 由定理 1.1.6, X 上 Fuzzy 关系全体 $F(X\times X)$ 关于普通的序关系构成一个完备的完全分配格, 且 O 为最小元, ∇_X 为最大元. 由定理 1.3.4, $(F(X\times X),\circ)$ 是一个可换的 幺半群. 因此, $\forall\mu\in F(X\times X)$, $\mu\circ\mu\circ\cdots\circ\mu$($n$ 个) 有意义, 记为 μ^n.

1.3.6 定理 设 $\{\mu_i\}_{i\in\Gamma}$ 为 X 上的 Fuzzy 关系簇, μ 为 X 上的 Fuzzy 关系, 则

(1) $(\bigcup_{i\in\Gamma}\mu_i)\circ\mu=\bigcup_{i\in\Gamma}(\mu_i\circ\mu)$;

(2) $(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i)\circ\mu=\bigcap_{i\in\Gamma}(\mu_i\circ\mu)$.

同理将 μ 左乘可得类似 (1),(2) 的结论.

证 $\forall(x,y)\in X^2$, 则

$$\left(\left(\bigcup_{i\in\Gamma}\mu_i\right)\circ\mu\right)(x,y)=\bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigcup_{i\in\Gamma}\mu_i\right)(x,z)\wedge\mu(z,y)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigvee_{i\in\Gamma}\mu_i(x,z)\right)\wedge\mu(z,y)\right)\\
&= \bigvee_{z\in X}\bigvee_{i\in\Gamma}(\mu_i(x,z)\wedge\mu(z,y))\\
&= \bigvee_{i\in\Gamma}(\mu_i\circ\mu)(x,y)\\
&= \left(\bigcup_{i\in\Gamma}\mu_i\circ\mu\right)(x,y),
\end{aligned}
$$

故 (1) 成立.

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i\right)\circ\mu\right)(x,y) &= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i\right)(x,z)\wedge\mu(z,y)\right)\\
&= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigwedge_{i\in\Gamma}\mu_i(x,z)\right)\wedge\mu(z,y)\right)\\
&= \bigvee_{z\in X}\bigwedge_{i\in\Gamma}(\mu_i(x,z)\wedge\mu(z,y))\\
&\leqslant \bigwedge_{i\in\Gamma}\bigvee_{z\in X}(\mu_i(x,z)\wedge\mu(x,y))\\
&= \bigwedge_{i\in\Gamma}(\mu_i\circ\mu)(x,y) = \left(\bigcap_{i\in\Gamma}(\mu_i\circ\mu)\right)(x,y),
\end{aligned}
$$

故 (2) 成立. 其他等式类似可证. 证毕. □

1.3.7 注 以上 (2) 我们换一个角度来看也很容易证得. 设 $\mu_1\leqslant\mu_2, \mu\in F(X^2)$, 则 $\mu_1\circ\mu\leqslant\mu_2\circ\mu$. 基于此以及 $\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i\leqslant\mu_i, \forall i\in\Gamma$, 因此 $(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i)\circ\mu\leqslant\mu_i\circ\mu, \forall i\in\Gamma$, 从而 $(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i)\circ\mu\leqslant(\bigcap_{i\in\Gamma}\mu_i)\circ\mu$. 值得注意的是该不等式等号未必成立. 例如: 取 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 为一可数集, 定义 X 上的 Fuzzy 关系 $\mu_k(k=1,2,\cdots)$ 如下:

$$
\mu_k(x_n,x_m)=\frac{m}{k+m}, n,m=1,2,\cdots,
$$

则

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\bigcap_{k-1}^{\infty}\mu_k\right)\circ\nabla_X\right)(x_n,x_m) &= \bigvee_{x_l\in X}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\mu_k\right)(x_n,x_l)\wedge\nabla_X(x_l,x_m)\right)\\
&= \bigvee_{x_l\in X}\bigwedge_{k=1}^{\infty}\mu_k(x_n,x_l) = \bigvee_{x_l\in X}\bigwedge_{k=1}^{\infty}\frac{l}{k+l}=0.
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(\mu_k \circ \nabla_X)(x_n, x_m) = \bigwedge_{k=1}^{\infty}(\mu_k \circ \nabla_X)(x_n, x_m)$$
$$= \bigwedge_{k=1}^{\infty}\left(\bigvee_{x_l \in X}(\mu_k(x_n, x_l) \wedge \nabla_X(x_l, x_m))\right)$$
$$= \bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigvee_{x_l \in X}\frac{l}{k+l} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} 1 = 1.$$

1.3.8 定义　X 上满足自反性、对称性和传递性的 Fuzzy 关系称为 X 上的 Fuzzy *等价关系*.

X 上的所有 Fuzzy 等价关系组成的集合记为 $FE(X)$. 设 $\mu \in FE(X), \forall (x, y) \in X^2$, 则

$$\mu \circ \mu(x, y) = \bigvee_{z \in X}(\mu(x, z) \wedge \mu(z, y))$$
$$\geqslant \mu(x, x) \wedge \mu(x, y) = \mu(x, y).$$

因此 $\mu \circ \mu = \mu$, 所以 $(FE(X), \circ)$ 是一个带.

下面我们讨论如何由一个 X 上的 Fuzzy 关系生成 X 上的 Fuzzy 等价关系.

1.3.9 定义　设 θ 为 X 上的 Fuzzy 关系. X 上包含 θ 的最小的 Fuzzy 等价关系称为 θ 在 X 上生成的 Fuzzy 等价关系, 记为 θ^e.

1.3.10 定理　设 $\{\theta_i\}_{i \in I}$ 为 X 上 Fuzzy 等价关系簇, 则 $\bigcap_{i \in I}\theta_i \in FE(X)$.

证　(1) $(\forall x \in X)\ \bigcap_{i \in I}\theta_i(x, x) = \bigwedge_{i \in I}\theta_i(x, x) = 1$;

(2) $(\forall x, y \in X)$
$$\left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right)(x, y) = \bigwedge_{i \in I}\theta_i(x, y)$$
$$= \bigwedge_{i \in I}\theta_i(y, x) = \left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right)(y, x);$$

(3)
$$\left(\left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right) \circ \left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right)\right)(x, y) = \bigvee_{z \in X}\left(\left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right)(x, z) \wedge \left(\bigcap_{i \in I}\theta_i\right)(z, y)\right)$$
$$= \bigvee_{z \in X}\bigwedge_{i \in I}(\theta_i(x, z) \wedge \theta_i(z, y))$$
$$\leqslant \bigwedge_{i \in I}\bigvee_{z \in X}(\theta_i(x, z) \wedge \theta_i(z, y))$$
$$= \bigwedge_{i \in I}(\theta_i \circ \theta_i)(x, y) \leqslant \bigwedge_{i \in I}\theta_i(x, y)$$

$$= \left(\bigcap_{i\in I}\theta_i\right)(x,y)\ \forall x,y\in X.$$

由 (1),(2) 和 (3) 得 $\bigcap_{i\in I}\theta_i$ 是 Fuzzy 自反、对称和传递的，故为 Fuzzy 等价关系．证毕．□

由定理 1.3.10, θ^e 恰为 X 上的包含 θ 的 Fuzzy 等价关系簇 $\{\theta_i\}_{i\in I}$ 的交．

1.3.11 定义　设 θ 为 X 上的 Fuzzy 关系,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n,\quad \theta^n=\overbrace{\theta\circ\theta\circ\cdots\circ\theta}^{n}$$

称 θ 为的 传递闭包, 记为 θ^∞.

1.3.12 定理　θ^∞ 是包含 θ 的最小的 Fuzzy 传递关系．

证　显然 $\theta\leqslant\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n,\forall x,y\in X$.

$$\begin{aligned}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n\right)\circ\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n\right)\right)(x,y) &= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n\right)(x,z)\wedge\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n\right)(z,y)\right)\\ &= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\theta^n(x,z)\right)\wedge\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\theta^n(z,y)\right)\right)\\ &\leqslant \bigvee_{z\in X}\bigvee_{n=1}^{\infty}(\theta^n(x,z)\wedge\theta^n(z,y))\\ &= \left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\theta^n\circ\theta^n\right)(x,y)=\left(\bigcup_{n=1}^{2n}\theta^{2n}\right)(x,y)\\ &\leqslant\left(\bigcup_{n=1}^{n}\theta^n\right)(x,y),\end{aligned}$$

故 $(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n)\circ(\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n)\leqslant\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n$. 进一步地，设 μ 为 X 上的 Fuzzy 传递关系且 $\theta\leqslant\mu$, 则 $\theta\circ\theta\leqslant\mu\circ\mu\leqslant\mu$, 从而 $\theta^n\leqslant\mu^n\leqslant\mu$ 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n\leqslant\mu$, 即 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\theta^n$ 是 X 上的包含 θ 的最小的 Fuzzy 传递关系．证毕．□

1.3.13 定理　设 θ,μ 为 X 上的 Fuzzy 关系，则

(1) 如果 θ 是 Fuzzy 对称的，则 θ^n 也是 Fuzzy 对称的；

(2) $\theta\leqslant\mu\Rightarrow\theta^\infty\leqslant\mu^\infty$;

(3) $\theta\circ\mu=\mu\circ\theta,\mu,\theta\in FE(X)\Rightarrow(\theta\circ\mu)^\infty=\theta\circ\mu$.

证 (1) 设 $n \geqslant 1, x, y \in X$,

$$\begin{aligned}\theta^n(x,y) &= \bigcup_{z_1,\cdots,z_{n-1}} (\theta(x,z_1) \wedge \theta(z_1,z_2) \wedge \cdots \wedge \theta(z_{n-1},y)) \\ &= \bigcup_{z_1,\cdots,z_{n-1}} (\theta(y,z_{n-1}) \wedge \theta(z_{n-1},z_{n-2}) \wedge \cdots \wedge \theta(z_1,x)) \\ &= \theta^n(y,x).\end{aligned}$$

因此 θ^n 是 Fuzzy 对称的，故 $\theta^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \theta^n$ 也是 Fuzzy 对称的.

(2) 设 $\theta \leqslant \mu$, 由注 1.3.7, $\theta^2 = \theta \circ \theta \leqslant \mu \circ \theta \leqslant \mu^2$, 进而可得 $\theta^n \leqslant \mu^n, n = 1, 2, \cdots$. 因此

$$\theta^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta^n \leqslant \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu^n = \mu^\infty.$$

(3) 设 $n \geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}(\theta \circ \mu)^n &= (\theta \circ \mu) \circ (\theta \circ \mu) \circ \cdots \circ (\theta \circ \mu) \\ &= (\theta \circ \theta \circ \cdots \circ \theta) \circ (\mu \circ \mu \circ \cdots \circ \mu) \\ &= \theta^n \circ \mu^n \leqslant \theta \circ \mu.\end{aligned}$$

因此

$$(\theta \circ \mu)^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\theta \circ \mu)^n \leqslant \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta \circ \mu = \theta \circ \mu.$$

显然 $\theta \circ \mu \leqslant (\theta \circ \mu)^\infty$, 故 $(\theta \circ \mu)^\infty = \theta \circ \mu$. 证毕. □

综上所述，我们现在有

1.3.14 定理 设 θ 为 X 上的 Fuzzy 关系，则 θ 生成的 X 上的 Fuzzy 等价关系 $\theta^e = (\theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X)^\infty$, 这里 θ^{-1} 称为 θ 的逆，定义为 $\theta^{-1}(x,y) = \theta(y,x), \forall x, y \in X$.

证 设 $\mu = (\theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X)^\infty$, 由定理 1.3.12, μ 是包含 θ 的 Fuzzy 传递关系. 因为 $\triangle_X \leqslant \theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X \leqslant \mu$, 所以 $\triangle_X(x,x) \leqslant \mu(x,x), \forall x \in X$. 故 $\mu(x,x) = 1$, 即 μ 是 Fuzzy 自反的. 显然 $\theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X$ 是 Fuzzy 对称的. 由定理 1.3.13(1), μ 是 Fuzzy 对称的. 因此 $\theta \leqslant \mu \in FE(X)$. 进一步地，设 $\Phi \in FE(X)$ 且 $\theta \leqslant \Phi$, 则 $\triangle_X \leqslant \Phi$, $\theta^{-1} \leqslant \Phi^{-1} = \Phi$, 从而 $\theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X \leqslant \Phi$. 因此 $(\theta \cup \theta^{-1} \cup \triangle_X)^\infty = \mu \leqslant \Phi^\infty = \Phi$. 证毕. □

1.3.15 定理 X 上的所有 Fuzzy 等价关系 $FE(X)$ 关于通常的 $F(X \times X)$ 上的偏序关系 "$\leqslant$" 构成完备格.

证 $(FE(X), \leqslant)$ 是一个偏序集，不难看出 $\triangle_X, \bigtriangledown_X \in FE(X)$ 且分别为 X 上的最小和最大的 Fuzzy 等价关系. 设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系簇. 则 $\bigcap\limits_{i\in I} \mu_i \in FE(X)$ (定理 1.3.10). 因此 $(FE(X), \leqslant)$ 是完备格. 证毕. □

下面我们有必要搞清楚 $(FE(X),\leqslant)$ 中任意两个元素的并 $\vee$ 是怎样描述的.

设 $\mu,\theta\in FE(X)$. 则 $\mu\vee\theta$ 是 X 上包含 μ 与 θ 的最小的 Fuzzy 等价关系, 即

$$\mu\vee\theta=\bigcap\{\Phi\in FE(X)\mid\mu\leqslant\Phi,\theta\leqslant\Phi\}.$$

设

$$\mu_0=\mu,\mu_1=\mu\circ\theta,\mu_2=\mu\circ\theta\circ\mu,\mu_3=\mu\circ\theta\circ\mu\circ\theta,\cdots.$$

显然 $\mu_0\leqslant\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots$, 且 $\mu_n\leqslant\mu\vee\theta$, $n=0,1,2\cdots$.

1.3.16 定理 设 $\mu,\theta\in FE(X)$. 则 $\mu\vee\theta=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n$.

证 (1) $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n(x,x)=\mu_0(x,x)=1,\forall x\in X$.

(2) 由 μ,θ 是 Fuzzy 对称的, 可得 $\mu_n(n=0,1,2,\cdots)$ 均为 Fuzzy 对称的, 从而 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n$ 也为 Fuzzy 对称的.

(3) 设 $\gamma=\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n,\forall x,y\in X$.

$$\begin{aligned}\gamma\circ\gamma(x,y)&=\bigvee_{z\in X}(\gamma(x,z)\wedge\gamma(z,y))\\&=\bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigvee_{n=0}^{\infty}\mu_n(x,z)\right)\wedge\left(\bigvee_{n=0}^{\infty}\mu_n(z,y)\right)\right)\\&=\bigvee_{z\in X}\bigvee_{n=0}^{\infty}(\mu_n(x,z)\wedge\mu_n(z,y))\\&=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mu_n(x,y)=\gamma(x,y).\end{aligned}$$

因此, $\gamma\circ\gamma\leqslant\gamma$. 综上 (1),(2),(3) 得 $\gamma\in FE(X)$. 显然 $\mu,\theta\leqslant\mu\circ\theta\leqslant\gamma$. 如果 $\Phi\in FE(X)$ 且 $\mu,\theta\leqslant\Phi$, 则 $\mu_n\leqslant\Phi$, $n=0,1,2,\cdots$. 从而 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n=\gamma\leqslant\Phi$. 证毕. □

1.3.17 练习 设 X 为非空集合. $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系簇. 令

$$\Phi_0=\bigcup_{i\in I}\mu_i,\Phi_1=\bigcup_{i,j\in I}\mu_i\circ\mu_j,\cdots,\Phi_{n-1}=\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in I}\mu_{i_1}\circ\mu_{i_2}\circ\cdots\circ\mu_{i_n},\cdots,$$

证明: (1) $\Phi_0\leqslant\Phi_1\leqslant\Phi_2\leqslant\cdots$;

(2) $\mu_i\leqslant\gamma$, 这里为 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 在 $FE(X)$ 中的最小上确界, 即 $\gamma=\bigvee\limits_{i\in I}\mu_i$;

(3) $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n$ 是 X 上的 Fuzzy 等价关系;

(4) $\gamma=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n$.

1.4 Fuzzy 等价类

我们知道，集合 X 上的任意等价关系 R 和 X 上的一个划分 $\{X_i \mid i \in I\}$ (这里 $\bigcup_{i\in I} X_i = X, X_i \cap X_j = \emptyset, i, j \in I, i \neq j$) 是相互确定的. 这一节，我们给出 X 的 Fuzzy 划分的定义，证明 X 上的 Fuzzy 等价关系与 X 上的 Fuzzy 划分相互确定.

设 μ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系. 则 $\mu \in FE(X \times X)$. 为了显目，记 μ 的 α 截集为 $F_\alpha, \alpha \in [0,1]$, α 强截集为 $G_\alpha, \forall\alpha \in [0,1)$.

1.4.1 定理 设 $\mu \in FE(X)$. 则 $F_\alpha, \alpha \in [0,1]$, G_α 均为 X 上的等价关系, $\forall\alpha \in [0,1)$.

证 $\forall x \in X$, $\mu(x,x) = 1 \geqslant \alpha$, 因此 $(x,x) \in F_\alpha$. 由 $\mu(x,y) = \mu(y,x)$ 得 $(x,y) \in F_\alpha$ 可推出 $(y,x) \in F_\alpha$. 设 $(x,z) \in F_\alpha$, $(z,y) \in F_\alpha$. 则

$$\begin{aligned}\mu(x,y) &\geqslant \mu \circ \mu(x,y)\\ &= \bigvee_{z\in X} (\mu(x,z) \wedge \mu(z,y)) \geqslant \alpha.\end{aligned}$$

因此 $(x,y) \in F_\alpha$. 类似地可以证明 G_α 也为 X 上的等价关系. 证毕. □

设 $x \in X$, 我们用 $[x]_{F_\alpha}$ 表示等价关系 F_α 包含 x 的等价类, F_α 的所有等价类记为 $X/F_\alpha := \{[x]_{F_\alpha} \mid x \in X\}$.

1.4.2 定理 设 μ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系. 则

(1) $[x]_{F_\alpha} \subseteq [x]_{F_\beta}, \forall 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$;

(2) $\bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha} = [x]_{F_1}$;

(3) $\bigcup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha} = [x]_{F_0}$.

证 (1) $\forall x, y \in X$, 如果 $(x,y) \in F_\alpha$, 则 $\mu(x,y) \geqslant \alpha \geqslant \beta$. 因此 $(x,y) \in F_\beta$. 故 $F_\alpha \leqslant F_\beta$, 从而 $[x]_{F_\alpha} \subseteq [x]_{F_\beta}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

(2) $\forall y \in \bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha}$, 则 $\mu(x,y) \geqslant \alpha, \forall\alpha \in [0,1]$. 从而 $\mu(x,y) = 1$, 即 $y \in [x]_{F_1}$, 反之由 $\mu(x,y) = 1$ 得 $[x]_{F_1} \subseteq [x]_{F_\alpha}, \forall\alpha \in [0,1]$. 因此 $\bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha} = [x]_{F_1}$.

(3) 由 (1), $0 \leqslant \alpha$, $[x]_{F_\alpha} \subseteq [x]_{F_0}$ 推得 $\bigcup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha} \subseteq [x]_{F_0}$, 又 $[x]_{F_0} \subseteq \bigcup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} [x]_{F_\alpha}$, 故 (3) 成立. 证毕. □

1.4.3 练习 依照定理 1.4.2, 证明 $G_\alpha, \alpha \in [0,1)$ 也有类似的性质，且 $[x]_{G_\alpha} \subset [x]_{F_\alpha}, \forall\alpha \in [0,1)$.

1.4.4 定理 设 $[x]_{F_\alpha}, [y]_{F_\alpha}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 是 F_α 两个互不相同的等价类. 则

(1) $\mu(x,y) < \alpha$.

(2) 设 $\mu(x,y)=\beta$. 则 $[x]_{F_\alpha}\cup[y]_{F_\alpha}\subseteq[x]_{F_\beta}=[y]_{F_\beta}$.

证 (1) 如果 $\mu(x,y)\geqslant\alpha$, 则 $(x,y)\in F_\alpha$ 和已知矛盾.

(2) 由定理 1.4.2, $\alpha>\beta$ 可推 $[x]_{F_\beta}\supseteq[x]_{F_\alpha}$, $[y]_{F_\beta}\supseteq[y]_{F_\alpha}$. 因此

$$[x]_{F_\alpha}\cup[y]_{F_\alpha}\supseteq[x]_{F_\beta}\cup[y]_{F_\beta}=[x]_{F_\beta}=[y]_{F_\beta}.$$

证毕. □

1.4.5 定义 设 X 为非空集合, $\lambda\in F(X)$. X 的一个 Fuzzy 子集簇 $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ 称为 λ 的 Fuzzy 划分, 如果

(1) $\lambda_i\cap\lambda_j=0, i\neq j, i,j\in I$;

(2) $\lambda=\bigcup\limits_{i\in I}\lambda_i$.

设 μ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系, $a\in X$. 记 $[a]=\{x\in X\mid\mu(a,x)>0\}$.

1.4.6 定理 $\{[a]\mid a\in X\}$ 是 X 的划分.

证 (1) 如果存在 $x\in[a]\cap[b]$. 则 $\mu(a,x)>0,\mu(b,x)>0$, 因此 $\mu(a,b)\geqslant\mu(a,x)\wedge\mu(x,b)>0$, 即 $b\in[a]$. 任取 $y\in[b]$, $\mu(a,y)\geqslant\mu(a,b)\wedge\mu(b,y)>0$, 故 $y\in[a]$. 上面证明了 $[b]\subseteq[a]$, 类似地可证 $[a]\subseteq[b]$. 从而 $[a]=[b]$.

(2) 显然 $X=\bigcup\limits_{a\in X}[a]$, 证毕. □

下面我们利用以上 X 的划分来定义一簇 X 上 Fuzzy 关系 σ_a : $\sigma_a(x,y)=\mu(x,y)$, $(x,y)\in[a]\times[a]$; 否则 $\sigma_a(x,y)=0$.

1.4.7 定理 $\{\sigma_a\mid a\in X\}$ 是 X 上 Fuzzy 等价关系 μ 的 Fuzzy 划分.

证 (1) 设 $\sigma_a\neq\sigma_b$. 则 $[a]\neq[b]$. 设 $\sigma_a(x,y)>0$. 则 $(x,y)\in[a]\times[a]$. 因此 $x,y\notin[b]$, 故 $\sigma_b(x,y)=0$. 类似可证 $\sigma_b(x,y)>0$ 推得 $\sigma_a(x,y)=0$, 即 $\sigma_a\cap\sigma_b=0$.

(2) $x,y\in X$. 如果 $\mu(x,y)=0$, 则 $\sigma_a(x,y)=0$, $\forall a\in X$, 因此 $(\bigcup\limits_{a\in X}\sigma_a)(x,y)=\mu(x,y)=0$; 如果 $\mu(x,y)>0$, 则 $y\in[x]$, 从而 $\sigma_x(x,y)=\mu(x,y)$. 如果 $\sigma_t\neq\sigma_x$, 由 (1) 得 $\sigma_t(x,y)=0$, 故

$$\left(\bigcup_{a\in X}\sigma_a\right)(x,y)=\sigma_x(x,y)=\mu(x,y).$$

综上所述, $\mu=\bigcup\limits_{a\in X}\sigma_a$. 证毕. □

1.4.8 定义 设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 X 上 Fuzzy 子集簇. 它称为 X 的 Fuzzy 划分, 如果

(1) $(\forall x\in X)(\exists|i\in I)\ \mu_i(x)=1$ 且 $(\mu_i)_1\neq\emptyset,\forall i\in I$;

(2) $\forall\alpha\in[0,1]$, $\{(\mu_i)_\alpha|i\in I\}$ 为 X 的划分;

(3) $\forall\alpha\in(0,1]$, 如果 $0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant1$, 则 $\{(\mu_i)_\alpha\mid i\in I\}$ 为 $\{(\mu_i)_\beta\mid i\in I\}$ 的加细.

1.4.9 例　设 X 为非空子集，令 μ_x 为 Fuzzy 点 x_1. 则 $\{x_1 \mid x \in X\}$ 为 X 的 Fuzzy 划分.

设 $\mu \in FE(X)$, $F_1 := \{(x,y) \in X^2 \mid \mu(x,y) = 1\}$ 是 X 上等价关系. 为了方便起见，我们也用 $\bar{x}$ 表示 $[x]_{F_1}$. 定义 $\mu_{\bar{x}}$ 如下：$\mu_{\bar{x}}(z) = \mu(x,z), \forall z \in X$ 如果 $y \in [x]_{F_1}$，则 $\mu_{\bar{y}}(z) = \mu(y,z) \geqslant \mu(x,y) \wedge \mu(x,z) = \mu(x,z) = \mu_{\bar{x}}(z)$. 类似地可证 $\mu_{\bar{x}}(z) \geqslant \mu_y(z)$. 因此 $\mu_{\bar{x}} = \mu_{\bar{y}}$. 综上说明 $\mu_{\bar{x}}$ 是 X 的 Fuzzy 子集，$\forall x \in X/F_1$

1.4.10 定理　设 μ 为 X 上的 Fuzzy 等价关系. 则 $\{\mu_{\bar{x}} \mid x \in X/F_1\}$ 是 X 的 Fuzzy 划分.

证　(1) $\forall x \in X, x \in \bar{x}$, 因此 $\mu_{\bar{x}}(x) = \mu(x,x) = 1$. 如果有 $\mu_{\bar{y}}(x) = \mu(x,y) = 1$, 则 $x = \bar{y}$. 因此 $\mu_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}}$.

(2) $\forall \alpha \in [0,1]$, 需证明 $\{\mu_{\bar{x}} | \bar{x} \in X/F_1\}$ 为 X 的一个划分. 事实上, $\forall x \in X$, 因为 $x \in [x]_{F_1}$, 所以 $\mu_{\bar{x}} = \mu(x,x) = 1 \geqslant \alpha$, 即 $x \in (\mu_{\bar{x}})_\alpha$. 从而 $X = \bigcup\limits_{\bar{x} \in X/F_1} (\mu_{\bar{x}})_\alpha$. 另一方面，如果存在 $z \in (\mu_{\bar{x}})_\alpha \cap (\mu_{\bar{y}})_\alpha$, 则 $\mu_{\bar{x}}(z) \geqslant \alpha, \mu_{\bar{y}}(z) \geqslant \alpha$. 由 μ 的传递性得 $\mu(x,y) \geqslant \mu(x,z) \wedge \mu(z,y) \geqslant \alpha$. 设 $t \in (\mu_{\bar{x}})_\alpha$, 则 $\mu_{\bar{x}}(t) = \mu(x,t) \geqslant \alpha$, 从而

$$\mu_{\bar{y}}(t) = \mu(y,t) \geqslant (x,y) \wedge \mu(x,t) \geqslant \alpha.$$

因此 $t \in (\mu_{\bar{x}})_\alpha$, 即 $(\mu_{\bar{x}})_\alpha \subseteq (\mu_{\bar{y}})_\alpha$, 同理可证 $(\mu_{\bar{y}})_\alpha \subseteq (\mu_{\bar{x}})_\alpha$.

(3) 如果 $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, 显然 $(\mu_{\bar{x}})_\alpha \subseteq (\mu_{\bar{x}})_\beta, \forall \bar{x} \in X/F_1$. 进一步地，如果 $z \in (\mu_{\bar{y}})_\alpha \cap (\mu_{\bar{x}})_\beta$, 则 $\mu(y,z) \geqslant \alpha$, $\mu \geqslant \beta$.

$$\begin{aligned} \forall w \in (\mu_{\bar{y}})_\alpha,\ \mu_{\bar{x}}(w) = \mu(x,w) &\geqslant \mu(x,y) \wedge \mu(y,w) \\ &\geqslant \mu(x,z) \wedge \mu(z,y) \wedge (y,w) \\ &\geqslant \alpha \wedge \beta \wedge \alpha = \beta. \end{aligned}$$

因此，$w \in (\mu_{\bar{x}})_\alpha$, 即 $(\mu_{\bar{y}})_\alpha \subseteq (\mu_{\bar{x}})_\beta$. 以上证得 $\{(\mu_{\bar{x}})_\alpha | \bar{x} \in X/F_1\}$ 为 $\{(\mu_{\bar{x}})_\beta | \dot{x} \in X/F_1\}$ 的加细. 证毕. □

1.4.11 练习　设 $x, y \in X, \mu \in FE(X)$, 且 $\mu(x,y) = \alpha$. 则 $\mu_{\bar{x}} \cap \mu_{\bar{x}} \leqslant \alpha \quad f_X$, 这里 f_X 为 X 的特征函数.

1.4.12 定理　设 $\{\mu_i\}_{i \in I}$ 为 X 的 Fuzzy 划分. 则 X 上的 Fuzzy 关系如下：

$$\mu : X \times X \to [0,1] \mid \mu(x,y) = \bigvee_{i \in I} (\mu_i(x) \wedge \mu_i(y)), \forall x, y \in X$$

则 μ 是 X 上的 Fuzzy 等价关系.

证　由 Fuzzy 划分的定义, $\forall x \in X$, 存在 $i \in I$ 使得 $\mu_i(x) = 1$, 因此 $\mu(x,x) = 1$.

由 μ 的定义，显然 $\mu(x,y)=\mu(y,x), \forall x,y\in X$，下证 μ 是传递的.

$$\begin{aligned}\mu\circ\mu(x,y) &= \bigvee_{z\in X}(\mu(x,z)\wedge\mu(z,y))\\ &= \bigvee_{z\in X}\left(\left(\bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(z))\right)\wedge\left(\bigvee_{i\in I}(\mu_i(z)\wedge\mu_i(y))\right)\right)\\ &\geqslant \bigvee_{z\in X}\bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(z)\wedge\mu_i(y))\\ &\geqslant \bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(y))=\mu(x,y),\forall x,y\in X.\end{aligned}$$

证毕. □

最后我们需进一步证明定理 1.4.12 中的 μ 所决定的 X 的 Fuzzy 划分就是已知的 Fuzzy 划分 $\{\mu_i\}_{i\in I}$.

1.4.13 定理 设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 X 的 Fuzzy 划分. 则该 Fuzzy 划分所决定的 Fuzzy 等价关系 μ 所决定的 Fuzzy 划分即为已知的 Fuzzy 划分.

证 由定理 1.4.12, $\mu(x,y)=\bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(y)),\forall x,y\in I$, 设 $\bar{x}\in X/F_1$, 则 $\mu_{\bar{x}}(x)=1$. 因为 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 是 X 的 Fuzzy 划分，存在唯一的 $j_x\in I$ 使得 $\mu_{j_x}(x)=1$, 下面我们证明 $\mu_{\bar{x}}=\mu_{j_x}$.

(1) $(\forall y\in X)\,\mu_{\bar{x}}(y)=\mu(x,y)=\bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(y))\geqslant\mu_{j_x}(x)\wedge\mu_{j_x}(y)=\mu_{j_x}(y)$;

(2) 给定充分小的 $\varepsilon>0$, 如果 $\mu(x,y)=0$, 则 $\mu_{\bar{x}}(y)=0\leqslant\mu_{j_x}(y)$, 如果 $\mu(x,y)>0$, 存在 $i_1\in I$ 使得

$$\mu_{i_1}(x)\wedge\mu_{i_1}(y)>\mu(x,y)-\varepsilon=\mu_{\bar{x}}(y)-\varepsilon.$$

即 $\mu_{i_1}(x)>\mu(x,y)-\varepsilon=\mu_{\bar{x}}(y)-\varepsilon$ 且 $\mu_{i_1}(y)>\mu(x,y)-\varepsilon=\mu_{\bar{x}}(y)-\varepsilon=\alpha$. 因此 $x,y\in(\mu_{i_1})_\alpha$. 又 $\{(\mu_i)_\alpha\mid i\in I\}$ 为 X 上的等价关系的等价类,因此 $(\mu_{i_1})_\alpha\cap(\mu_{j_x})_\alpha=\emptyset$ 或 $(\mu_{i_1})_\alpha=(\mu_{j_x})_\alpha$. 由于 x 为它们共同元素，所以 $(\mu_{i_1})_\alpha=(\mu_{j_x})_\alpha$, 即 $\mu_{j_x}(y)\geqslant\alpha=\mu_{\bar{x}}(y)-\varepsilon$, 由 ε 的任意性得 $\mu_{j_x}(y)\geqslant\mu_{\bar{x}}(y),\forall y\in X$.

综上 (1),(2) 得 $\mu_{j_x}=\mu_{\bar{x}}$.

(3) $\forall x\in X$, 存在唯一的 $j_x\in I$ 使得 $\mu_{j_x}(x)=1$. 记 $K_x=\{y\in X\mid\mu_{j_x}(y)=1\}$. 下面我们证 $K_x=[x]_{F_1}$. 设 $y\in[x]_{F_1}$, 则 $\mu(x,y)=1$. 如果 $\mu_{j_x}(y)\neq1$, 则存在 α 使得 $\mu_{j_x}(y)<\alpha<1$. 因为 $\{(\mu_i)_\alpha\mid i\in I\}$ 为 X 的划分，所以 x,y 不在同一个 $(\mu_i)-\alpha$ 类中, 因此 $\mu_i(x)\wedge\mu_i(y)<\alpha,\forall i\in I$, 当然 $\mu(x,y)=\bigvee_{i\in I}(\mu_i(x)\wedge\mu_i(y))\leqslant\alpha$, 矛盾. 以上证明了 $[x]_{F_1}\subseteq K_x$. 反之，$\forall y\in K_x$, 则 $\mu_{j_x}(y)=1$. 因此 $\mu(x,y)\geqslant\mu_{j_x}(x)\wedge\mu_{j_x}(y)=1$, 则 $\mu(x,y)=1$,$y\in[x]_{F_1}$. 推出 $K_x\subseteq[x]_{F_1}$, 根据以上论证，任意 $\mu_i\in\{\mu_i\mid i\in I\}$, 存在 $x\in X$ 使得 $\mu_i(x)=1$, 所以 $\mu_i=\mu_{j_x}=\mu_{\bar{x}}$. 证毕. □

1.5 评　述

如同一个集合 X 的 Fuzzy 子集是 X 的普通子集的推广，一个集合 X 上的二元关系可以推广为 X 上的 Fuzzy 二元关系. X 与 Y 之间的 Fuzzy 关系 $R(x,y)$ 首先由 Zadeh 引入 [135], 后来他接着提出并研究 Fuzzy 相似关系 [136]. 1966 年至 1977 年之间，有很多数学家在 Fuzzy 关系上做了大量的工作，如 Goguen[23], Kaufmann[42], Sanchez[95], Rosenfeld[91] 等. 1983 年至 1986 年间，Chakraborty 和 Das[12,13] 及 Nemita[74] 研究了与等价及 Fuzzy 函数相连的 Fuzzy 关系与格值 Fuzzy 关系. Murali[67] 给出了 Fuzzy 划分的定义并证明 Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 划分一一对应. 但是人们对 Fuzzy 等价关系定义中自反性为什么要求 $\mu(x,x)=1$, $\forall x\in X$, 提出疑问 [12]. 为此，Yeh[128] 从两个方面来考虑，引入 ε- 自反性与弱自反性. 如果 μ 为 X 上的 Fuzzy 关系，$\mu(x,x)\geqslant\varepsilon$, $\forall x\in X$, 称 μ 为 ε- 自反的；如果 $\mu(x,x)\geqslant\mu(x,y)$, $\forall x,y\in X$, 称 μ 为弱自反性的. 进一步，Gupta[22] 定义 X 上的 Fuzzy 关系称为 G- 自反的，如果

$$\mu(x,y)\leqslant\bigwedge_{t\in X}\mu(t,t),\forall x,y\in X,x\neq y;\mu(x,x)>0,\forall x\in X.$$

Fuzzy 等价关系 μ 中将自反性换为 G- 自反的，称 μ 为 G 等价关系. 对于 G 等价关系，Gupta 给出了比 Murali 更一般的结果.

另一方面，在 Fuzzy 理论的应用方面，我们所考虑的对象集往往是有限的. 例如，Fuzzy 排序问题，Fuzzy 聚类分析，Fuzzy 综合评判以及 Fuzzy 图，所以我们有必要讨论有限集上的 Fuzzy 偏序关系，Fuzzy 等价关系等. 当 $|X|<\infty$ 时，X 上的 Fuzzy 关系我们可以用矩阵来表示，这个矩阵我们称之为 Fuzzy 矩阵，关于 Fuzzy 矩阵 (包括 Boole 矩阵) 的理论与应用读者可参看相关书籍.

第 2 章　Fuzzy 子半群

本章试图讲述半群的 Fuzzy 理论中最基本的思想和内容，包括 Fuzzy 子半群的基本性质、Fuzzy 子系统的同态及其同态基本性质. 关于同态基本定理的 Fuzzy 体现，我们在以后的章节中还要提到. 本章还给出 Fuzzy 子系统的直积与半直积，以及相关的半群嵌入定理.

2.1　Fuzzy 子半群

设 S 为半群. 如果 S 没有单位元，非常容易地加一个额外元素 1 到 S 并定义其上的运算为

$$(\forall s \in S)\ \ s \cdot 1 = 1 \cdot s = s,\ 1 \cdot 1 = 1.$$

则将原 S 上的二元运算扩张为 $S \cup 1$ 上的二元运算且它关于这个运算为幺半群，记为 S^1.

设 $A \subseteq S, B \subseteq S$ 为 S 的两个非空子集，记 $AB = \{ab \mid \forall a \in A, b \in B\}$. 如果 $A^2 \subseteq A$, A 称为 S 的 *子半群*; 如果 $SA(AS) \subseteq A$, 称 A 为 S 的左 (右) 理想. 如果 A 既是 S 的 *左理想* 又是 S 的 *右理想*, 称 A 为 S 的 *理想*. 如果 $ASA \subseteq A$, 且 A 为 S 的子半群，称 A 为 S 的 *双理想*. 我们知道，一个半群 S 是群当且仅当 S 没有真的双理想. 如果 S 的子半群 A 满足 $SAS \subseteq A$, A 称为 *内素理想*.

2.1.1 定义　设 X 为非空集合，$(X, \cdot)$ 为 *群胚*, 我们定义 $F(X)$ 上的乘法 "$\circ$" 运算如下：

$$(\forall x \in X)\ \ (f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{yz=x} \{f(y) \wedge g(z)\}, & \text{设存在} y, z \in X, x = yz; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

2.1.2 注　在第一章以及很多文献中，集合上的 Fuzzy 子集大部分应该用小写希腊字母 $\mu, \nu, \cdots$ 表示，而以下要经常涉及 Fuzzy 点 x_λ 的下标也是用小写希腊字母表示，为了不至于混淆，以下 Fuzzy 子集经常也用 $f, g, h, \cdots$ 表示. 在一个群胚 $(X, \cdot)$ 中，运算符号也经常省略.

2.1.3 性质　设 $(X, \cdot)$ 为群胚，$f, g, x_\lambda, y_\mu \in F(X)$, $0 < \lambda, \mu \leqslant 1$. 则

(1) $x_\lambda \circ y_\mu = (xy)_{\lambda \wedge \mu}$;

(2) $f \circ g = \bigcup_{x_\lambda \in f, y_\mu \in g} x_\lambda \circ y_\mu$.

这里 $x_\lambda \in f$ 指的是 $x_\lambda \leqslant f$, 且 x_λ 是 Fuzzy 点.

证 由定义 2.1.1, (1) 是显然的.

(2) 任取 $\omega \in X$, 如果 ω 不能写成两个 X 中的元素之积, 则 $f \circ g(\omega) = 0$ 且 $x_\lambda \circ y_\mu(\omega) = 0, \forall x_\lambda \in f, y_\mu \in g$, 当然上式成立. 如果 $\omega = \mu\nu, \mu, \nu \in X$, 则

$$\begin{aligned} f \circ g(\omega) &= \bigcup_{\mu\nu=\omega} (f(\mu) \wedge g(\nu)) \\ &\geqslant \bigcup_{\mu\nu=\omega, x_\lambda \in f, y_\mu \in g} (x_\lambda(\mu) \wedge y_\mu(\nu)) \geqslant x_\lambda \circ y_\mu(\omega). \end{aligned}$$

由 $x_\lambda \in f, y_\mu \in g$ 选择的任意性得 $f \circ g(\omega) \geqslant (\bigcup_{x_\lambda \in f, y_\mu \in g} x_\lambda \circ y_\mu)(\omega)$.

另一方面,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{x_\lambda \in f, y_\mu \in g} x_\lambda \circ y_\mu\right)(\omega) &= \bigvee_{x_\lambda \in f, y_\mu \in g} (x_\lambda \circ y_\mu)(\omega) \\ &= \bigvee_{x_\lambda \in f\ y_\mu \in g} \bigvee_{\mu\nu=\omega} (x_\lambda(\mu) \wedge y_\mu(\nu)) \\ &\geqslant \bigvee_{\mu\nu=\omega} (\mu_{f(\mu)}(\mu) \wedge \nu_{g(\nu)}(\nu)) \\ &= \bigvee_{\mu\nu=\omega} (f(\mu) \wedge g(\nu)) = (f \circ g)(\omega). \end{aligned}$$

因此 (2) 得证. 证毕. □

2.1.4 练习 设 $(X, \cdot)$ 为群胚. 证明:

(1) 如果 $(X, \cdot)$ 为半群, 则 $(F(X), \circ)$ 也为半群.

(2) 如果 $(X, \cdot)$ 是可换的, 则 $(F(X), \circ)$ 也可换.

(3) 如果 $(X, \cdot)$ 有单位元 e, 则存在 Fuzzy 点 e_λ 使得 $(\forall f \in F(X))$ $f \circ e_\lambda = e_\lambda \circ f = f$.

(4) 问在 (3) 中的 e_λ 唯一吗?

2.1.5 定义 设 $(S, \cdot)$ 为半群, $f \in F(S)$. f 称为 S 的 Fuzzy子半群, 如果 $f \circ f \leqslant f$.

2.1.6 定理 设 $(S, \cdot)$ 为半群, $f \in F(S)$. 则下列各款等价:

(1) f 为 S 的 Fuzzy 子半群;

(2) $(\forall x_\lambda, y_\mu \in f)$ $x_\lambda \circ y_\mu \in f$;

(3) $(\forall x, y \in S)$ $f(xy) \geqslant \min\{f(x), f(y)\}$.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 因为 f 为 Fuzzy 子半群, 所以 $(\forall x_\lambda, y_\mu \in f)$ $x_\lambda \circ y_\mu \leqslant f \circ f \leqslant f$

(2) $\Longrightarrow$ (3). 因为 $x_{f(x)}, y_{f(y)} \in f$, 由假设,

$$(\forall x, y \in S)\ \ f(xy) \geqslant x_{f(x)} \circ y_{f(y)}(xy) = \min\{f(x), f(y)\}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). $(\forall z\in S)\ \ f(z)\geqslant f\circ f(z)$. 事实上，如果 z 不能表示成 S 中的两个元素之积，则 $f(z)\geqslant 0=f\circ f(z)$. 如果 z 可以表示成两个元素之积，设 $z=xy$. 则

$$f(z)=f(xy)\geqslant \bigvee_{\mu\nu=z}(f(\mu)\wedge g(\nu))=f\circ f.$$

因此，$f\circ f\leqslant f$. 证毕. □

2.1.7 注 由练习 2.1.4 及定理 2.1.6, 同时因为 $(S,\cdot)$ 是结合的，所以

$$(\forall x_\lambda,y_\mu,z_\gamma\in f)\ \ (x_\lambda\circ y_\mu)\circ z_\gamma=x_\lambda\circ(y_\mu\circ z_\gamma).$$

如果 S 是可换的，则 f 中的任意两个 Fuzzy 点可换.

如果 S 为幺半群，e 为其单位元. 记 $\lambda=\bigvee_{x\in S}f(x)$. 当 $\mu\geqslant\lambda$ 时，$e_\mu\circ x_\lambda=x_\lambda\circ e_\mu=x_\lambda,\forall x_\lambda\in f$.

2.1.8 定理 设 S 为半群. f 为 S 的 Fuzzy 子半群当且仅当对 $\lambda\in[0,1]$, 如果 $f_\lambda\neq\emptyset$, 则 f_λ 为 S 的子半群.

证 ($\Longrightarrow$). 设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群，任取 $x,y\in f_\lambda$, 则 $f(x)\geqslant\lambda,f(y)\geqslant\lambda$. 由 $f(xy)\geqslant\min\{f(x),f(y)\}$ 得 $f(xy)\geqslant\lambda$, 因此 $xy\in f_\lambda$.

($\Longleftarrow$). $\forall x_\lambda,y_\mu\in f$, 不妨设 $\lambda\geqslant\mu$, 则 $x,y\in f_\mu$. 由假设 f_μ 为 S 的 Fuzzy 子半群，因此 $xy\in f_\mu$, 即

$$f(xy)\geqslant\mu=\min\{x_\lambda(x),y_\mu(y)\}.$$

取 $\lambda=f(x),\mu=f(y)$, 则 $x_\lambda,y_\mu\in f$. 由上推理,

$$f(xy)\geqslant\min\{x_{f(x)}(x),y_{f(y)}(y)\}=\min\{f(x),f(y)\}.$$

根据定理 2.1.6, f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 证毕. □

2.2 Fuzzy 子半群的积

本节我们讨论 T- 范数 Fuzzy 子半群的直积和半直积.

2.2.1 定义 设 S 为半群. S 的 Fuzzy 子集 μ 称为 S 的 T- 范数 Fuzzy 子半群, 如果

$$(\forall x,y\in S)\ \ \mu(xy)\geqslant T(\mu(x),\mu(y)).$$

2.2.2 定义 设 S 为幺半群，e 为 S 的单位元. 如果 S 的 T- 范数 Fuzzy 子半群 μ 满足 $\mu(e)=1$, 称 μ 为 S 的 T- 范数 Fuzzy 幺子半群.

2.2.3 定义 设 S 为半群，$Aut(S)$ 为 S 的自同态半群，K 为 $Aut(S)$ 的子半群. 称 S 的 Fuzzy 子半群 μ 为 K- 不变的, 如果 $(\forall x\in S)(k\in K)\ \ \mu(x^k)=\mu(x)$, 其中 x^k 表示 x 在 k 下的象.

2.2.4 定义 设 S, H 为半群，在集合 $S \times H := \{(s,h) \mid s \in S, h \in H\}$ 上规定二元运算 "$\cdot$" 如下：

$$(s,h) \cdot (s_1,h_1) = (ss_1, hh_1),$$

其中 ss_1、hh_1 分别是半群 S 和半群 H 中的积. 则我们不难看出 $(S \times H, \cdot)$ 是半群，我们称该半群为 S 和 H 的 *直积*.

2.2.5 定义 设 S, H 为半群，$\varphi : S \to Aut(H)$ 是半群同态. 在集合 $S \times H := \{(s,h) \mid s \in S, h \in H\}$ 上规定二元运算 "$\bigodot$" 如下：

$$(s,h) \bigodot (s_1,h_1) = (ss_1, (h)^{\varphi(s_1)} h_1),$$

我们不难看出 $(S \times H, \bigodot)$ 是半群, 我们称该半群为 S 和 H 的 *半直积*, 记为 $H \times_{\varphi} K$.

值得注意的是，直积是特殊的半直积，只要将 φ 取为平凡同态，即将 S 的每个元素对应为 $Aut(H)$ 的单位即可.

下面我们给出 Fuzzy 子半群的直积和半直积的定义以及它们能成为一个 Fuzzy 子半群的条件.

2.2.6 定义 设 μ, ν 分别为半群 S 和 H 的 Fuzzy 子半群. Fuzzy 子集 $\mu \times \nu \in F(S \times H)$ 称为 μ 和 ν 的 *T- 范数直积*, 如果

$$(\forall s \in S, \forall h \in H) \ \ \mu \times \nu(s,h) = T(\mu(s), \nu(h)).$$

2.2.7 定义 设 μ, ν 分别为半群 S 和 H 的 Fuzzy 子半群，$\varphi : S \to Aut(H)$ 是半群同态且 ν 是 $\varphi(S)$- 不变的. Fuzzy 子集 $\mu \times_{\varphi} \nu \in F(S \times_{\varphi} H)$ 称为 μ 和 ν 关于 *T- 范数和 φ 的半直积*, 如果

$$(\forall s \in S, \forall h \in H) \ \ \mu \times_{\varphi} \nu(s,h) = T(\mu(s), \nu(h)).$$

2.2.8 定理 设 μ, ν 分别为半群 S 和 H 的关于 T- 范数的 Fuzzy 子半群. 如果 $T' \gg T$, 则 T' 直积 $\mu \times \nu$ 是关于 T- 范数的 $S \times H$ 的 Fuzzy 子半群.

证 任取 $(s,h), (s',h') \in S \times H$,

$$\begin{aligned}
\mu \times \nu((s,h)(s',h')) &= \mu \times \nu(ss', hh') \\
&= T'(\mu(ss'), \nu(hh')) \\
&\geqslant T'(T(\mu(s), \mu(s')), T(\nu(h), \nu(h'))) \\
&\geqslant T(T'(\mu(s), \mu(s')), T'(\nu(h), \nu(h'))) \\
&= T(\mu \times \nu(s,h), \mu \times \nu(s',h')).
\end{aligned}$$

根据定义 2.2.1, $\mu \times \nu$ 是关于 T 的 $S \times H$ 的 Fuzzy 子半群. 证毕. □

2.2.9 定理 设 μ, ν 分别为半群 S 和 H 的关于 T- 范数的 Fuzzy 子半群, $\varphi: S \to Aut(H)$ 是半群同态且 ν 是 $\varphi(S)$- 不变的. 如果 $T' \gg T$, 则 T' 半直积 $\mu \times_{\varphi} \nu$ 是关于 T- 范数的 $S \times_{\varphi} H$ 的 Fuzzy 子半群.

证 任取 $(s,h),(s',h') \in S \times_{\varphi} H$,

$$\begin{aligned}
\mu \times_{\varphi} \nu((s,h)(s',h')) &= \mu \times_{\varphi} \nu(ss',(h)^{\varphi(s')}h')) \\
&= T'(\mu(ss'),\nu((h)^{\varphi(s')}h')) \\
&\geqslant T'(T(\mu(s),\mu(s')),T(\nu(h^{\varphi(s')}),\nu(h'))) \\
&\geqslant T(T'(\mu(s),\mu(s')),T'(\nu(h),\nu(h'))) \\
&= T(\mu \times_{\varphi} \nu(s,h),\mu \times_{\varphi} \nu(s',h')).
\end{aligned}$$

根据定义 2.2.1, $\mu \times_{\varphi} \nu$ 是关于 T 的 $S \times_{\varphi} H$ 的 Fuzzy 子半群. 证毕. □

2.2.10 注 设 S 和 H 为幺半群, 它们的单位元分别为 e_S, e_H, μ, ν 分别为 S 和 H 的 Fuzzy 含幺子半群, 即 $\mu(e_S) = 1, \nu(e_H) = 1$. 在定理 2.2.8 中, 如果将 S 和 H, μ 和 ν 做如上相应的修改, 则 $\mu \times \nu$ 是 $S \times H$ 的关于 T- 范数的 Fuzzy 含幺子半群. 事实上,

$$\mu \times \nu(e_S, e_H) = T'(\mu(e_S), \nu(e_H)) = T'(1,1) = 1.$$

类似地, 我们知 $\mu \times_{\varphi} \nu$ 是 $S \times_{\varphi} H$ 的 T- 范数 Fuzzy 含幺子半群.

2.2.11 定理 设 S 和 H 为幺半群, 它们的单位元分别为 e_S, e_H, μ, ν 分别为 S 和 H 的关于 T- 范数的 Fuzzy 含幺子半群. 如果 $T' \gg T$, 且 $i_S: S \to S \times H \mid i_H(s) = (s, e_H)$, $i_H: H \to S \times H \mid i_H(h) = (e_S, h)$. 则 $(\mu \times \nu) \circ i_S = \nu$, $(\mu \times \nu) \circ i_H = \nu$.

证 任取 $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \nu) \circ i_S(s) &= \mu \times \nu(s, e_H) \\
&= T'(\mu(s), \nu(e_H)) = T'(\mu(s), 1) = \mu(s).
\end{aligned}$$

所以, $(\mu \times \nu) \circ i_S = \nu$. 同理可证 $(\mu \times \nu) \circ i_H = \nu$. 证毕. □

2.2.12 注 (1) 在这里我们关注一下两个 Fuzzy 子半群同态的定义, 即设 φ 为半群 S 到半群 T 的满同态映射, μ, ν 分别为 S 和 T 的 Fuzzy 子半群. 如果 $\varphi(\mu) = \nu$, 则 μ 和 ν 称为 Fuzzy 同态的. 如果 $\nu \circ \varphi = \mu$, 则

$$(\forall x \in S)\ \varphi^{-1}(\nu)(x) = \nu(\varphi(x)) = \mu(x),$$

即 $\varphi^{-1}(\nu) = \mu$. 由定理 1.1.13, $\varphi(\mu) = \varphi(\varphi^{-1}(\nu)) = \nu$. 如果 φ 不是满射, 我们不能得到 $\nu \circ \varphi = \mu$ 和 $\varphi(\mu) = \nu$ 等价的结论.

(2) 在定理 2.2.8, 2.2.9 中我们均要求 S 和 T 的两个 Fuzzy 子半群 μ,ν 在 T- 范数 T' 下的直积 (半直积) 是 $S\times H(S\times_\varphi H)$ 的关于 T- 范数 T 的 Fuzzy 子半群, 且 $T'\gg T$. 如果没有 $T'\gg T$ 这个条件, 结论就不一定成立. 例如, 设 T 和 T' 是两个 T- 范数, 且 T' 不能控制 T. 则存在 $a_1,b_1,a_2,b_2\in[0,1]$ 使得

$$T'(T(a_1,b_1),T(a_2,b_2))<T(T'(a_1,a_2),T'(b_1,b_2)).$$

设 $G_1=G_2=\{e,x,y,z\}$ 是四元素群, $x^2=y^2=z^2=e$. 定义 $G_i(i=1,2)$ 上的 Fuzzy 子集为: $\mu_i(e)=1$, $\mu_i(x)=a_i$, $\mu_i(y)=b_i$, $\mu_i(z)=T(a_i,b_i)$. 不难验证 μ_i 是 G_i 的 Fuzzy 子半群. 但是

$$\mu_1\times\mu_2(x,x)(y,y)<T(\mu_1\times\mu_2(x,x),\mu_1\times\mu_2(y,y)).$$

因此, $\mu_1\times\mu_2$ 不是 $G_1\times G_2$ 关于 T- 范数 T 的 Fuzzy 子半群.

下面我们考虑一个 T- 范数的特殊情形 $M:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]\mid(x,y)\to x\wedge y$. 由第 1 章我们知道对任意的 T- 范数 T 均有 $M\gg T$. 在定理 2.2.8 中取 $T=T'=M$, 则半群 S 和半群 H 的 Fuzzy 子半群 μ 和 ν 的关于 T- 范数 M 的直积是 $S\times H$ 的关于 T- 范数 M 的 Fuzzy 子半群.

2.2.13 定理 设 S 和 H 为幺半群, 它们的单位元分别为 e_S,e_H. μ,ν 分别为 S 和 H 的关于 T- 范数 M 的 Fuzzy 含幺集. 如果 $\mu\times\nu$ 是 $S\times H$ 的关于 T- 范数 M 的 Fuzzy 含幺子半群. 则下列命题至少一个成立:

(1) $\nu(e_S)\geqslant\mu(x),\forall x\in S$;

(2) $\mu(e_H)\geqslant\nu(y),\forall y\in H$.

证 因为 $\mu\times\nu$ 是 $S\times H$ 的 Fuzzy 含幺子半群. 如果以上 (1) 和 (2) 均不成立, 则存在 $a\in S,b\in H$ 使得 $\nu(e_S)<\mu(a),\mu(e_H)<\nu(b)$. 因此

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(a,b)&=\mu(a)\wedge\nu(b)\\&>\mu(e_H)\wedge\nu(e_S)\\&=\mu\times\nu(e_S,e_H)=1.\end{aligned}$$

矛盾. 证毕. □

2.2.14 定理 设 S 和 H 为幺半群, 它们的单位元分别为 e_S,e_H. μ,ν 分别为 S 和 H 的关于 T- 范数 M 的 Fuzzy 含幺集. 如果 $\mu\times\nu$ 是 $S\times H$ 的关于 T- 范数 M 的 Fuzzy 含幺子半群. 则 μ 和 ν 分别是 S 和 H 的 Fuzzy 子半群.

证
$$\begin{aligned}(\forall x,y\in S)\ \mu(xy)&=\mu(xy)\wedge\nu(e_He_H)\\&=(\mu\times\nu)(x,e_H)(x,e_H)\\&\geqslant(\mu\times\nu(x,e_H)\wedge(\mu\times\nu(y,e_H)\\&=\mu(x)\wedge\nu(e_H)\wedge\mu(y)=\mu(x)\wedge\mu(y).\end{aligned}$$

因此 μ 是 S 的 Fuzzy 子半群，同理我们可以证明 ν 也是 H 的 Fuzzy 子半群. 证毕. □

2.3 幂等 Fuzzy 子集格

本节设 G 为群且单位元为 e, S 为半群. 下面我们定义群 G 的几类 Fuzzy 子集：

$F_{-1}(G):\ =\{f\in F(G)\mid f\subseteq f\circ f\}$,

$F_0(G):\ =\{f\in F(G)\mid f(x)\leqslant f(e),\forall x\in G\}$,

$F_1(G):\ =\{f\in F(G)\mid f\supseteq f\circ f\}$,

$F_2(G):\ =F_{-1}(G)\cap F_1(G)$,

$F_3(G):\ =F_1(G)\cap F_0(G)$,

$F_4(G):\ =G$的 Fuzzy 子群集.

显然 $F_4(G)\subseteq F_3(G)\subseteq F_2(G)\subseteq F_1(G)$ 且 $F_4(G)\subseteq F_3(G)\subseteq F_0(S)\subseteq F_{-1}(G)$. 如果将 G 换成半群 S, 我们可以类似定义 $F_{-1}(S),F_1(S),F_2(S),F_4(S)$. 当 S 是幺半群时，也可以类似定义 $F_0(S)$ 和 $F_3(S)$. 我们在前面已经知道，在 $F(S)$ 中，乘法对并运算具有无限分配律，但是乘法对交运算是否也具有无限分配律？我们先看一个引理.

2.3.1 引理　设 S 是具有消去律的半群，S 的所有 Fuzzy 点集记为 $M(S)$, 如果 $(x_i,\alpha_i),(y_j,\beta_j),(y,\beta)\in M(S),i\in I,j\in J$. 则

(1) $(\bigcap\limits_{i\in I}(x_i,\alpha_i))\circ(y,\beta)=\bigcap\limits_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\circ(y,\beta)$;

(2) $(y,\beta)\circ(\bigcap\limits_{i\in I}(x_i,\alpha_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(y,\beta)\circ(x_i,\alpha_i)$;

(3) $(\bigcap\limits_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\circ(\bigcap\limits_{j\in J}(y_j,\beta_j))=\bigcap\limits_{i\in I,j\in J}(x_i,\alpha_i)\circ(y_j,\beta_j)$.

证　(1) 假设 $\{(x_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ 不是链，则一定存在 $j,k\in I$ 使得 $x_j\neq x_k$. 由假设 $x_jy\neq x_ky$. 因此 $\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\subseteq(x_j,\alpha_j)\cap(x_k,\alpha_k)=0$. 即 $(\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i))\circ(y,\beta)=0$. 另一方面，

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I}((x_i,\alpha_i)\circ(y,\beta))&\subseteq(x_j,\alpha_j)\circ(y,\beta)\cap(x_k,\alpha_k)\circ(y,\beta)\\&=(x_jy,\alpha_j\wedge\beta)\cap(x_ky,\alpha_k\wedge\beta)=0,\end{aligned}$$

如果 $\{(x_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ 在 $M(S)$ 中是一条链，则存在 $x\in S$ 使得 $x_i=x,\forall i\in I$. 这时 $\{(x_i,\alpha_i)\circ(y,\beta)\}_{i\in I}=\{(xy,\alpha_i\wedge\beta)\}_{i\in I}$ 在 $M(S)$ 中也是一条链. 我们再分以下两种情形来讨论：

情型 I 如果 $\bigwedge_{i\in I}\alpha_i=0$, 则 $\bigwedge_{i\in I}(\alpha_i\wedge\beta)=0$. 因此,

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\right)\circ(y,\beta)&=0\circ(y,\beta)=0\\&=\bigcap_{i\in I}(x_iy,\alpha_i\beta)=\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\circ(y,\beta).\end{aligned}$$

情型 II 如果 $\bigwedge_{i\in I}\alpha_i=\alpha>0$, 则

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\right)\circ(y,\beta)&=(x,\bigwedge_{i\in I}\alpha_i\circ(y,\beta)\\&=(xy,\alpha\wedge\beta)=\left(xy,\bigwedge_{i\in I}(\alpha_i\wedge\beta)\right)\\&=\bigcap_{i\in I}(xy,\alpha_i\beta)=\bigcap_{i\in I}(x_i,\alpha_i)\circ(y,\beta).\end{aligned}$$

(2) 和 (3) 证明可以仿照 (1) 得出，留给读者练习．证毕． □

进一步地，我们有

2.3.2 定理 设 S 是具有消去律的半群．如果 $f_i,g_j,f,g\in F(S),i\in I,j\in J$, 则

(1) $(\bigcap_{i\in I}f_i)\circ g=\bigcap_{i\in I}(f_i\circ g)$;

(2) $g\circ(\bigcap_{i\in I}f_i)=\bigcap_{i\in I}(g\circ f_i)$;

(3) $(\bigcap_{i\in I}f_i)\circ(\bigcap_{j\in J}g_j)=\bigcap_{i\in I,j\in J}(f_i\circ g_j)$.

证 我们仅证 (1), (2) 和 (3) 可仿照证明．由 Fuzzy 集的分解定理,

$$g=\bigcup\{(y_k,\beta_k):\ k\in K\},\quad f_i=\bigcup\{(x_{ij},\alpha_{ij}):\ j\in J_i\},i\in I.$$

则由 $F(S)$ 关于交并运算是完全分配格得

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I}f_i&=\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i}(x_{ij},\alpha_{ij})\right)\\&=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\left(\bigcap_{i\in I}(x_{i\sigma(i)},\alpha_{i\sigma(i)})\right),\end{aligned}$$

这里 Σ 是定义域为 I 且对 $\forall i\in I,\sigma(i)\in J_i$ 的选择函数集.

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I}f_i\right)\circ g&=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\left(\bigcap_{i\in I}(x_{i\sigma(i)},\alpha_{i\sigma(i)})\right)\circ\bigcup_{k\in K}(y_k,\beta_k)\\&=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in I}(x_{i\sigma(i)},\alpha_{i\sigma(i)})\circ(y_k,\beta_k)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{(\sigma,k)\in\Sigma\times K}\left(\bigcap_{i\in I}(x_{i\sigma(i)},\alpha_{i\sigma(i)})\circ(y_k,\beta_k)\right)\\
&= \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{(j,k)\in J_i\times K}(x_{ij},\alpha_{ij})\circ(y_k,\beta_k)\right)\\
&= \bigcap_{i\in I} f_i\circ g.
\end{aligned}
$$

证毕. □

下面我们讨论 $F_{-1}(S)$ 和 $F_1(S)$ 这两个子集. 我们先给个例子说明 $F_{-1}(S)$ 不是 $F_1(S)$ 的子格.

2.3.3 例 设 $S=\{1,-1,i,-i\}$ 关于普通的复数运算构成幺半群. 取 $A=\{1,i\}$, $B=\{-1,i,-i\}$, 则

$$
f_A\subset f_{A^2}=f_A\circ f_A,\ f_B\subset f_{B^2}=f_B\circ f_B,
$$
$$
f_A\cap f_B=f_{A\cap B},\ (f_A\cap f_B)\circ(f_A\cap f_B)=f_{(A\cap B)^2}.
$$

由此我们看出, $f_A, f_B\in F_{-1}(S)$, 但是 $f_A\cap f_B$ 和 $(f_A\cap f_B)\circ(f_A\cap f_B)$ 是不可比的. 因此 $f_A\cap f_B\notin F_{-1}(S)$. 但是我们仍然可以得出 $F_{-1}(S)$ 为一完备格.

2.3.4 定理 设 S 为半群. 则 $F_{-1}(S)$ 关于通常子集的并和适当的交构成完备格.

证 $F_{-1}(S)$ 中元素关于 Fuzzy 子集通常大小关系构成偏序集. 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_{-1}(S)$. 则

$$
f_\alpha\subseteq f_\alpha\circ f_\alpha\subseteq\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)\circ\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right).
$$

因此 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\subseteq(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha)\circ(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha)$, 即 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\in F_{-1}(S)$. 进一步地, 偏序集 $F_{-1}(S)$ 有最小元 0. 由完备格的相关结论, $F_{-1}(S)$ 为完备格. 其中 $F_{-1}(S)$ 中两个元素 f_1 和 f_2 的交 "$\wedge_1$" 就是包含在 (或称小于) $f_1\cap f_2$ 的 $F_{-1}(S)$ 中所有元素之并. 证毕. □

2.3.5 注 在定理 2.3.4 中, 交运算 "$\wedge_1$" 似乎没有表达清楚. 在一般情况下, 我们较难给出清晰的描述. 但是如果我们假设 S 具有消去律, $f\in F(S)$, 则 $F_{-1}(S)$ 中包含于 f 的最大元恰为 $\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n$, 记为 $|f|_{-1}$. 事实上, 设 $\mu=|f|_{-1}$. 则根据定理 2.3.2, $\mu\circ\mu=\bigcap_{n=2}^{\infty}f^n\supseteq\mu$, 即 $\mu\in F_{-1}(S)$ 且 $\mu\subseteq f$. 另一方面, 如果 $\delta\in F_{-1}(S)$ 且 $\delta\subseteq f$, 则 $\delta\subseteq\delta\circ\delta\subseteq f^2$. 归纳地, 我们可以得出 $\delta\subseteq f^n, n=2,3,\cdots$, 即 $\delta\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n=|f|_{-1}$.

我们再讨论 $F_1(S)$. 首先 $F_1(S)$ 也不是 $F(S)$ 的子格.

2.3.6 例 设 $S=\{a,b,c,d\}$ 且 S 上的二元运算表如下:

·	a	b	c	d
a	a	b	a	d
b	a	b	d	c
c	a	d	a	d
d	c	d	c	c

f 为 S 的 [0,1] 区间的映射, $f(a)=1, f(b)=1/2, f(c)=1/3, f(d)=1/3$. g 也为 S 的 [0,1] 区间的映射, $g(a)=1, g(b)=1/3, g(c)=1/2, g(d)=1/3$. 则 f, g 均为群胚 S 的 Fuzzy 子群胚. 但是 $f\cup g\notin F_1(S)$, 因为 $f\cup g=\{a,b,c\}$ 不是 S 的子群胚.

2.3.7 定理　设 S 是半群. 则 $F_1(S)$ 是完备格.

证　设有 Fuzzy 子半群集 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_1(S)$. 则 $(\bigcap_\alpha f_\alpha)\circ(\bigcap_\alpha f_\alpha)\subseteq f_\alpha\circ f_\alpha\subseteq f_\alpha$, $\forall\alpha\in\Gamma$, 因此 $(\bigcap_\alpha f_\alpha)\circ(\bigcap_\alpha f_\alpha)\subseteq(\bigcap_\alpha f_\alpha)$ 又偏序集 $(F_1(S),\subseteq)$ 中有最大元 S, 因此 $F_1(S)$ 是完备格. 设 $f,g\in F_1(S)$, 则 $f\vee_1 g$ 是 $F_1(S)$ 中包含 $f\cup g$ 的所有元素的交. 证毕. □

2.3.8 注　在例 2.3.6 中我们已经知道一般情况下, 如果 $f,g\in F_1(S)$, 则 $f\vee_1 g$ 和 $f\cup g$ 是不一样的. 为了更清楚看清 $f\vee_1 g$, 设 $h\in F(S)$. 则 h 在 S 中生成的最小 Fuzzy 子半群为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}h^n$. 因此 $f\vee_1 g=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(f\cup g)^n$.

本节的最后我们重点讨论幂等 Fuzzy 子集集 $F_2(S)$ 格性质.

2.3.9 定理　设 $f\in F(S)$. 则下列各款是等价的:

(1) $f\in F_2(S)$;

(2) (a) $f\in F_1(S)$; (b) 给定 $d\in S$, 则在 S 中存在两个元素列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得 $d=a_nb_n$ 且 $\lim\min_{n\to\infty}\{f(a_n),f(b_n)\}=f(d)$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 因为 $\sup\min_{d=ab}\{f(a),f(b)\}=f\circ f(d)=f(d)$. 对任给的正整数 n, 存在 $a_n,b_n\in S$ 使得 $d=a_nb_n$, 且

$$f(d)-\frac{1}{n}<\min\{f(a_n),f(b_n)\}\leqslant f(d).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). 我们用反证法. 因为 $f\in F_1(S)$, 如果 $f\notin F_2(S)$, 则存在 $d\in S$ 使得 $f\circ f(d)<f(d)$. 由假设 (2), 存在两个元素列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得 $d=a_nb_n$ 且 $\lim\min_{n\to\infty}\{f(a_n),f(b_n)\}=f(d)$. 另一方面, $\min\{f(a_n),f(b_n)\}\leqslant f\circ f(d)$ 因此 $f(d)\leqslant f\circ f(d)$. 矛盾. □

2.3.10 定理　设 S 是幺半群, $f\in F_1(S)$. 则下列各款是等价的:

(1) $(f^{-1}(\tau,\alpha])^2=f^{-1}((\tau,\alpha])$, 这里 α 是 f 在 [0,1] 上取值的最大值, $0\leqslant\tau<\alpha$;

(2) 给定 $d\in S$, 则在 S 中存在两个元素列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得 $d=a_nb_n$, 且

$$\lim\min_{n\to\infty}\{f(a_n),f(b_n)\}=f(d).$$

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $d\in S$, 如果 $f(d)=0$, 取 $a_n=d, b_n=e, \forall n\in\mathbf{N}$, e 为 S 的单位元. 则

$$\lim_{n\to\infty}\min\{f(a_n),f(b_n)\}=0=f(d).$$

设 $0<f(d)$. 对每个使得存在一个正整数 n_0, 当 $n\leqslant n_0$ 时, 有 $0<f(d)-\dfrac{1}{n}<f(d)$. 由假设, 存在两个元素列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得 $d=a_nb_n$, $a_n,b_n\in f^{-1}(f(d)-\dfrac{1}{n},\alpha])$. 这意味着

$$f(d)-\frac{1}{n}<\min\{f(a_n),f(b_n)\}\leqslant f(a_nb_n)=f(d).$$

结果 $\lim\min_{n\to\infty}\{f(a_n),f(b_n)\}=f(d)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 $A=f^{-1}(\tau,\alpha]$. 如果 $a,b\in A$, 则 $f(a)>\tau, f(b)>\tau$, 且 $\tau<\{f(a),f(b)\}\leqslant f(ab)\leqslant\alpha$. 因此, $ab\in A$, 即 $A^2\subseteq A$. 另一方面, 设 $d\in A$, 则 $\tau<f(d)$. 存在两个元素列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得 $d=a_nb_n$ 且 $\lim\min_{n\to\infty}\{f(a_n),f(b_n)\}=f(d)$. 又 $\min\{f(a_n),f(b_n)\}\leqslant f(d)$, 存在两个元素 $\{a_m\},\{b_m\}$ 使得 $d=a_mb_m$ 且 $\tau<\min\{f(a_m),f(b_m)\}\leqslant f(d)$. 这意味着 $\tau<f(a_m),f(b_m)$, 因此 $a_m,b_m\in f^{-1}(\tau,\alpha]$, $d\in A^2$. 证毕. □

2.3.11 练习 *设 S 是具有消去律的半群. 则*

$$f\in F_2(S)\Longleftrightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^n.$$

2.3.12 定理 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_2(S)$. 则 $\bigcup\limits_{\alpha}f_\alpha\Longleftrightarrow\bigcup\limits_{\alpha\neq\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)\subseteq\bigcup\limits_{\alpha}f_\alpha$.

证

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha}f_\alpha\in F_2(S)\Leftrightarrow\bigcup_{\alpha}f_\alpha&=\Big(\bigcup_{\alpha}f_\alpha\Big)\circ\Big(\bigcup_{\alpha}f_\alpha\Big)\\&=\bigcup_{\alpha,\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)=\Big(\bigcup_{\alpha}f_\alpha^2\Big)\cup\Big(\bigcup_{\alpha\neq\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)\Big)\\&=\Big(\bigcup_{\alpha}f_\alpha\Big)\cup\Big(\bigcup_{\alpha\neq\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)\Big)\\&\Leftrightarrow\Big(\bigcup_{\alpha\neq\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)\Big)\subseteq\bigcup_{\alpha}f_\alpha.\end{aligned}$$

证毕. □

同理我们可以证明

2.3.13 定理 设 S 是具有消去律的半群, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_2(S)$. 则

$$\bigcap_{\alpha}f_\alpha\Longleftrightarrow\bigcap_{\alpha\neq\beta}(f_\alpha\circ f_\beta)\subseteq\bigcap_{\alpha}f_\alpha.$$

我们现举例说明偏序集 $(F_2(S),\subseteq)$ 一般情况下有限交和有限并均不是封闭的.

2.3.14 例 设 $S=(0,\infty)$. 则 S 关于数的普通乘法是半群. 令 $P=(1,\infty)$, $Q=\{1,2,4,8,\cdots\}$, $R=(0,1)$. 则 $P^2=P, Q^2=Q, R^2=R$. 因此 $f_P, f_Q, f_R\in F_2(S)$. 因为 $P\cap Q=\{2,4,8,\cdots\}$, $(P\cap Q)^2\neq P\cap Q$, 所以 $f_{(P\cap Q)}=f_Q\cap f_P\notin f_2(S)$. 因为 $P\cup R=(0,1)\cup(1,\infty)$, $(P\cup R)^2\neq P\cup R$, 所以 $f_{(P\cup R)}=f_P\cup f_R\notin f_2(S)$.

记 $|f|_2$ 表示包含于 f 的 $F_2(S)$ 中最大元.

2.3.15 定理 设 S 是具有消去律的半群, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_2(S)$. 则

$$\left|\bigcap_\alpha f_\alpha\right|_2=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_\alpha f_\alpha\right)^n=\left|\bigcap_\alpha f_\alpha\right|_{-1}.$$

证 设 S 是具有消去律的半群, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_2(S)$. 则 $\bigcap_\alpha f_\alpha\subseteq F_1(S)$. 令 $g=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcap\limits_\alpha f_\alpha)^n$. 则 $g\in F_1(S)$, 且 $g=|\bigcap_\alpha f_\alpha|_{-1}$, $g\in F_1\cap F_{-1}=F_2(S)$. 下面我们证明 $g=|\bigcap_\alpha f_\alpha|_2$. 设 $h\subseteq\bigcap_\alpha f_\alpha$, 因为 g 是包含在 $\bigcap_\alpha f_\alpha$ 中 F_{-1} 的最大元素, 因此 $h\subseteq g$. 故 $g=|\bigcap\limits_\alpha f_\alpha|_2=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcap\limits_\alpha f_\alpha)^n=|\bigcap\limits_\alpha f_\alpha|_{-1}$. □

根据前面已证的结果和定理 2.3.14, 记 $[f]_i$ 表示包含 f 的 $F_i(S)$ 中的最小元, $i=1,2,3,4$. 我们有

2.3.16 练习 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subseteq F_2(S)$. 则

$$\left[\bigcup_\alpha f_\alpha\right]_2=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^n=\left[\bigcup_\alpha f_\alpha\right]_1.$$

总结定理 2.3.15 和练习 2.3.16, 我们有

2.3.17 定理 设 S 是具有消去律的半群, 则 $F_2(S)$ 关于以下定义的交和并是一个完备格.

$$(\forall f,g\in F_2(S))\quad f\vee g=\bigcup_{n=1}^{\infty}(f\cup g)^n=[f\cup g]_1,\quad f\wedge g=\bigcap_{n=1}^{\infty}(f\cap g)^n=[f\cap g]_1.$$

2.4 Fuzzy 同态

本节讨论半群间同态对 Fuzzy 子系统的影响, 以及讨论两个 Fuzzy 子系统间的几种 Fuzzy 同态.

2.4.1 定理 设 S 和 T 为两个半群, μ 为 S 的 Fuzzy 子半群. 又设 φ 为 S 到 T 的同态映射. 则 $\varphi(\mu)$ 是 T 的 Fuzzy 子半群.

证 由定义

$$\varphi(\mu)(y):=\sup_{x\in\varphi^{-1}(y)}\mu(x), \forall y\in T\quad(\sup\emptyset:=0).$$

我们现在需要证明

$$\varphi(\mu)(y_1y_2) \geqslant \varphi(\mu)(y_1) \wedge \varphi(\mu)(y_2), \forall y_1, y_2 \in T.$$

设 $y \in T$. 记 $X_y := \varphi^{-1}(y)$. 因为 φ 为同态映射，因此，$X_{y_1}X_{y_2} \subseteq X_{y_1y_2}$. 事实上，$\forall z \in X_{y_1}X_{y_2}$. 则存在 $z_1 \in X_{y_1}, z_2 \in X_{y_2}$ 使得 $z = z_1z_2$, 且 $\varphi(z_1) = y_1, \varphi(z_2) = y_2$, 因此,

$$\varphi(z) = \varphi(z_1z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2) = y_1y_2,$$

即 $z \in \varphi^{-1}(y_1y_2) = X_{y_1y_2}$. 设 $y_1y_2 \notin \mathrm{Im}\varphi = \varphi(S)$, 则 $\varphi(\mu)(y_1y_2) = 0$. 另一方面，$y_1y_2 \notin \varphi(S)$ 意味着 $\varphi^{-1}(y_1y_2) = X_{y_1y_2} = \emptyset$, 因此 $X_{y_1} = \emptyset$ 或 $X_{y_2} = \emptyset$. 从而 $\varphi(y_1) = 0$ 或 $\varphi(y_2) = 0$ 综上所述，当 $y_1y_2 \notin \mathrm{Im}\varphi$ 时

$$\varphi(\mu)(y_1y_2) = 0 = \varphi(\mu)(y_1) \wedge \varphi(\mu)(y_2).$$

设 $X_{y_1y_2} \neq \emptyset$. 如果 $X_{y_1} = \emptyset$ 或 $X_{y_2} = \emptyset$, 显然有 $\varphi(\mu)(y_1) = 0$ 或 $\varphi(\mu)(y_2) = 0$. 从而 $\varphi(\mu)(y_1y_2) \geqslant \varphi(y_1) \wedge \varphi(\mu)(y_2)$. 如果 $X_{y_1} \neq \emptyset, X_{y_2} \neq \emptyset$. 则

$$\varphi(\mu)(y_1y_2) = \sup_{z \in X_{y_1y_2}} \mu(z) \geqslant \sup_{z \in X_{y_1}X_{y_2}} \mu(z) = \sup_{x_1 \in X_{y_1}, x_2 \in X_{y_2}, x_1x_2 = z} \mu(x_1x_2).$$

由于 μ 为 S 的 Fuzzy 子半群，故

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu)(y_1y_2) &\geqslant \sup_{x_1 \in X_{y_1}, x_2 \in X_{y_2}} (\mu(x_1) \wedge \mu(x_2)) \\
&= \sup_{x_1 \in X_{y_1}} (\sup_{x_2 \in X_{y_2}} (\mu(x_1) \wedge \mu(x_2)) \\
&= \sup_{x_1 \in X_{y_1}} \mu(x_1) \vee \sup_{x_2 \in X_{y_2}} \mu(x_2) \\
&= \varphi(\mu)(y_1) \wedge \varphi(\mu)(y_2).
\end{aligned}$$

证毕. □

2.4.2 定理　设 S 和 T 为两个半群，φ 为 S 到 T 的同态映射，ν 为 T 的 Fuzzy 子半群. 则 $\varphi^{-1}(\nu)$ 为 S 的 Fuzzy 子半群.

证　设 $x_1, x_2 \in S$. 则

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\nu)(x_1x_2) &= \nu(\varphi(x_1x_2)) \\
&= \nu(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) \geqslant \nu(\varphi(x_1)) \wedge \nu(\varphi(x_2)) \\
&= \varphi^{-1}(\nu)(x_1) \wedge \varphi^{-1}(\nu)(x_2).
\end{aligned}$$

□

2.4.3 注 由以上两个定理, 我们有这样的启示: 设有两个代数系统 (环、域、模等) S 和 T 为这两个代数系统的同态. 则 S 的 Fuzzy 子系统 ν 在 φ 下的象是 T 的 Fuzzy 子系统. 反之 T 的 Fuzzy 子系统 ν 在 φ 下的原象是 S 的 Fuzzy 子系统.

2.4.4 练习 设 G 和 T 为两个群, φ 为 G 到 T 的同态映射, μ 和 ν 分别为 G 和 T 的 Fuzzy 子集且满足性质:

(A) 设 S 为群, 则 $f \in F(S)$, $f(x^{-1}) \geqslant f(x), \forall x \in S$.

则

(1) 如果 μ 满足 (A), 则 $\varphi(\mu)$ 也满足 (A);

(2) 如果 ν 满足 (A), 则 $\varphi^{-1}(\nu)$ 也满足 (A).

设 S 为半群, $\mu \in F(S)$. μ 在 S 中称为处处能达到上确界, 如果

$$(\forall A \subseteq S)(\exists x_0 \in S) \bigvee \{\mu(x) \mid x \in A\} = \mu(x_0).$$

2.4.5 定义 设 S 为半群, $\mu \in F(S)$. μ 称为有上确界性质 (sup property), 如果 μ 在 S 中处处能达到上确界且

$$(\forall A \subseteq S)(\exists x_0 \in A) \bigvee \{\mu(x) \mid x \in A\} = \mu(x_0).$$

2.4.6 例 设 S 为整数加法半群, (2^n) 表示 2^n 生成的子半群, $n = 1, 2, \cdots$. 定义 S 上的 Fuzzy 子集如下: 1) $x \in S\backslash(2), \mu(x) = 0$; 2) $x \in (2^n)\backslash(2^{n+1})$, $\mu(x) = 1/2(1 - 1/2^n), n = 1, 2, \cdots$; 3) $\mu(0) = 1/2$ 则 μ 为 S 的 Fuzzy 子半群, 且 μ 处处达到上确界, 但是 μ 没有上确界性质. 事实上, 取 $A = S\backslash\{0\}$, 则

$$\bigvee\{\mu(x) \mid x \in A\} = 1/2 \neq \mu(x_0), \forall x_0 \in A.$$

如果在 S 中定义 Fuzzy 子集 ν 如下: 1) $x \in S\backslash(2), \nu(x) = 0$; 2) $x \in (2^n)\backslash(2^{n+1})$, $\nu(x) = 1/2(1 - 1/2^n), n = 1, 2, \cdots$; 3) $\nu(0) = 1$. 则 ν 为 S 的 Fuzzy 子半群, 且 ν 在 S 中既不能处处达到上确界, 也不能有上确界性质.

2.4.7 定理 设 μ 为半群 S 的 Fuzzy 子半群. 则 μ 有上确界性质当且仅当 $\forall a \in [0,1], \mu_a \subset \bigcap_{b<a, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b$.

证 必要性. 设 μ 有上确界性质. $\forall a \in [0,1]$, 记 $A_a = \{x \in S \mid \mu(x) < a\}$, 又记 $a_1 = \bigvee\{\mu(x) \mid x \in A_a\}$. 因为 μ 有上确界性质, 存在 $x_0 \in A_a$ 使得 $\mu(x_0) = a_1 < a$. 因此 $\mu_a \subseteq \mu_{a_1}$ 且 $x_0 \notin \mu_a$. 又 $x_0 \in \mu_{a_1} \subseteq \mu_b, \forall b \leqslant a_1$, 故

$$\mu_{a_1} \subseteq \bigcap_{b\leqslant a, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b = \bigcap_{b<a, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b.$$

从而 $\mu_a \subset \bigcap_{b<a, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b$.

充分性. 设 μ 没有上确界性质. 存在 $A \subseteq S$ 使得 $\mu(x) \neq a_1, \forall x \in A$. 这里 $a_1 = \vee\{\mu(x) \mid x \in A\}$. 因为 $\mu_{a_1} \subseteq \bigcap_{b<a_1, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b$, 记 $\mathrm{Im}\mu$ 的子集合 $\{b \in \mathrm{Im}\mu \mid (\exists x \in A)\ \mu(x) = b\}$ 为 $(A, \mathrm{Im}\mu)$, 则

$$a_1 = \vee\{b \mid b \in (A, \mathrm{Im}\mu)\} \leqslant \vee\{b \mid b < a_1, b \in \mathrm{Im}\mu\} \leqslant a_1.$$

因此, 如果 $x \in \bigcap_{b<a_1, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b$, 则 $\mu(x) \geqslant b, \forall b < a_1, b \in \mathrm{Im}\mu$. $\mu(x) \geqslant \vee\{b \mid b < a_1, b \in \mathrm{Im}\mu\} = a_1$. 因此 $x \in \mu_{a_1}$, $\mu_{a_1} = \bigcap_{b<a_1, b\in \mathrm{Im}\mu} \mu_b$, 这和假设矛盾. 证毕. □

2.4.8 定理　设 φ 是半群 S 到半群 T 的同态映射, $\mu \in F(S)$. 如果 μ 为 S 有上确界性质的 Fuzzy 子半群. 则 $f(\mu)$ 在 T 中也是 T 的有上确界性质 Fuzzy 子半群.

证　由定理 2.4.1, $\varphi(\mu)$ 为 T 的 Fuzzy 子半群. 设 $A \subseteq T$. 如果 $\varphi^{-1}(A) = \emptyset$, 则结论成立. 如果 $\varphi^{-1}(A) \neq \emptyset$, 则

$$\begin{aligned}\vee\{\varphi(\mu)(y) \mid y \in A\} &= \vee\{\vee\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(y) \mid y \in A\} \\ &= \vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(A)\}.\end{aligned}$$

因为 μ 具有上确界性质, 所以存在 $x_0 \in \varphi^{-1}(A)$ 使得 $\vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(A)\} = \mu(x_0)$. 因此 $y_0 = \mu(x_0) \in A$, 且

$$\varphi(\mu)(y_0) = \vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(y_0)\}.$$

又 $x_0 \in \varphi^{-1}(y_0) \subseteq f^{-1}(A)$, 因此

$$\vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(A)\} \geqslant \vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(y_0)\}.$$

由 $x_0 \in \varphi^{-1}(y_0)$ 得

$$\mu(x_0) \geqslant \vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(y_0)\} \geqslant \mu(x_0),$$

即 $\mu(x_0) = \vee\{\mu(x) \mid x \in \varphi^{-1}(y_0)\} = \varphi(u)(y_0)$. 因此 $\varphi(\mu)$ 具有上确界性质. 证毕. □

2.4.9 定理　设 φ 为半群 S 到半群 T 的同态映射, $\eta \in F(T)$. 如果 η 为 T 的具有上确界性质的 Fuzzy 子半群, 则 $\varphi^{-1}(\eta)$ 为 S 的具有上确界性质的 Fuzzy 子半群.

证　由定理 2.4.2, φ^{-1} 为 S 的 Fuzzy 子半群. 设 $A \subseteq S$. 则

$$\begin{aligned}\vee\{\varphi^{-1}(\eta)(x) \mid x \in A\} &= \vee\{\eta(\varphi(x)) \mid x \in A\} \\ &= \vee\{\eta(y) \mid y \in \varphi(A)\}.\end{aligned}$$

因为 η 具有上确界性质，存在 $y_0 \in \varphi(A)$ 使得

$$\begin{aligned}\eta(y_0) &= \vee\{\eta(\varphi(x)) \mid x \in A\} \\ &= \vee\{\varphi^{-1}(\eta)(x) \mid x \in A\}.\end{aligned}$$

又 $y_0 \in \varphi(A)$, 存在 $x_0 \in A$ 使得 $\varphi(x_0) = y_0$. 因此，$\varphi^{-1}(\eta)(x_0) = \eta(\varphi^{-1}(x_0)) = \eta(y_0)$. 故 $\varphi^{-1}(\eta)$ 具有上确界性质. 证毕. □

2.4.10 练习　*设 S 为半群，$\mu, \nu \in F(S)$. 如果 μ, ν 在 S 中具有上确界性质，则 $\mu \cap \nu$ 在中也具有上确界性质.*

当然还有很多问题可以考虑. 例如在上一练习中，$\mu \circ \nu$ 有没有上确界性质？设 μ 为 S 的 Fuzzy 子集且具有上确界性质，那么 μ 在中 S 生成的 Fuzzy 理想有没有上确界性质？

下面我们考虑 Fuzzy 子系统之间的几种同态形式及其相互关系.

2.4.11 定义　设 φ 为半群 S 到半群 T 的满同态映射，μ, ν 分别为 S 和 T 的 Fuzzy 子半群. 如果 $\varphi(\mu) = \nu$, 称 μ 为 ν 和是 I- 型同态.

2.4.12 定义　在定义 2.4.11 中，如果 $\forall\alpha \in [0,1]$, μ_α 和 ν_α 同态，称 μ 和 ν 是 II- 型同态.

2.4.13 定理　设 S 和 T 为半群，$\mu \in F(S), \nu \in F(T)$. 又设 μ, ν 分别为 S 和 T 的子 Fuzzy 半群且 I - 型同态. 如果 μ 有上确界性质，则它们也是 II - 型同态的.

证　设 φ 为 S 到 T 的同态映射且 $\varphi(\mu) = \nu, \forall x \in \mu_\alpha$. 则 $\mu(x) \geqslant \alpha$,

$$\nu(\varphi(x)) = \varphi(\mu)(\varphi(x)) = \bigvee_{z \in \varphi^{-1}(\varphi(x))} \mu(z) \geqslant \mu(x) \geqslant \alpha.$$

因此，$\varphi(x) \in \mu_\alpha$.

另一方面，$\forall y \in \nu_\alpha, \varphi^{-1}(y) \subseteq S$. 由 μ 有上确界性质，即存在 $x_0 \in \varphi^{-1}(y)$ 使得

$$\mu(x_0) = \bigvee_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu(x) = \varphi(\mu)(y) = \nu(y) \leqslant \alpha.$$

综上所述，φ 在 μ_α 上的限制为 μ_α 到 ν_α 的满同态映射. 证毕. □

2.4.14 例　设 $S = T = Z$ 为整数加法半群，$f_{(3)}, f_{(5)}$ 为两个 Fuzzy 子半群，这里 (3), (5) 表示 3 和 5 生成的子半群. $\forall\alpha \in [0,1]$, $f_{(3)}$ 和 $f_{(5)}$ 的 α- 截集是同态的，即 $f_{(3)}$ 和 $f_{(5)}$ 为 II - 型同态，但是我们不能找到 S 到 T 的满同态 φ 使得 $\varphi(f_{(3)}) = f_{(5)}$.

2.4.15 定理　设 S 和 T 为半群，μ, ν 分别为 S 和 T 的 Fuzzy 子半群且为 II - 型同态. 又设 μ 有上确界性质. 则 μ 和 ν 是 I - 型同态当且仅当存在从 S 到 T 的满同态 φ 使得 $\varphi(\mu_\alpha) = \nu_\alpha, \forall\alpha \in [0,1]$.

证　必要性. 设 μ,ν 是 II- 型同态. 则 μ_α 和 $\nu_\alpha(\forall\alpha\in[0,1])$ 同态. 特别地, 取 $\alpha=0$, 有 $\mu_0=S$ 和 $\nu_0=T$ 同态, 设同态映射为 φ. 下面只要证明 $\varphi(\mu_\alpha)=\nu_\alpha,\forall\alpha\in[0,1]$. 反之, 如果存在 $\alpha\in[0,1]$ 使得 $\varphi(\mu_\alpha)\neq\nu_\alpha$. 存在 $y_1\in\nu_\alpha$, $\mu_\alpha\cap\varphi^{-1}(y_1)=\emptyset$. 另一方面, 因为 μ,ν 为 I- 型同态, 所以存在同态映射 ψ 使得 $\psi(\mu)=\nu$.

$$\nu(y_1)=\psi(\mu)(y_1)=\bigvee_{z\in\psi^{-1}(y_1)}\mu(z)\geqslant\alpha.$$

由 μ 有上确界性质, 存在 $z_0\in\varphi^{-1}(y_1)$ 使得 $\mu(z_0)=\nu(y_1)\geqslant\alpha$, $z_0\in\mu_\alpha$ 和 $\mu_\alpha\cap\varphi^{-1}(y_1)=\emptyset$ 矛盾. 故 $\varphi(\mu_\alpha)=\nu_\alpha$.

充分性. 假设存在 S 到 T 的满同态映射 φ 使得 $\varphi(\mu_\alpha)=\nu_\alpha,\forall\alpha\in[0,1]$. 下面证明 $\varphi(\mu)=\nu$. 任取 $y_0\in T$, 设 $\nu(y_0)=\alpha_0$. 因为 $\varphi(\mu_\alpha)=\nu_\alpha$, 由 $\varphi(\mu_{\alpha_0})=\nu_{\alpha_0},y_0\in\nu_{\alpha_0}$ 存在 $x_0\in\mu_{\alpha_0}$ 使得 $x_0\in\varphi^{-1}(y_0)$, 所以

$$\bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y_0)}\mu(x)\geqslant\mu(x_0)\geqslant\alpha_0.$$

下证 $\nu(y_0)=\bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y_0)}\mu(x)=\mu(\mu)(y_0)$, 否则只有 $\nu(y_0)<\bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y_0)}\mu(x)$. 根据假设, μ 在 S 中有上确界性质, 存在 $x_1\in\varphi^{-1}(y_0)$ 使得 $\mu(x_1)>\nu(y_0)$. 设 $\alpha_1=\mu(x_1)$. 因为 $\varphi(\mu_{\alpha_1})=\nu_{\alpha_1},x_1\in\mu_{\alpha_1}$, 必有 $\varphi(x_1)\in\nu_{\alpha_1}$, 即 $y_0\in\nu_{\alpha_1}$, 因此 $\nu_{y_0}=\alpha_0\geqslant\alpha_1$, 这和 $\mu(x_1)>\nu(y_0)$ 矛盾. 因此 $\nu(y_0)=\varphi(\mu)(y_0)$, 由 y_0 选取的任意性, 得 $\nu=\varphi(\mu)$. 证毕. □

以后我们称两个 Fuzzy 半群之间的 I- 型同态为同态.

2.5　嵌入定理

设 $(S,\cdot)$ 为半群. 如果 $(S,\leqslant)$ 是偏序集, 且 "$\leqslant$" 关于半群 S 的乘法是相容的, 即

$$(\forall x,a,b\in S)\quad a\leqslant b\Rightarrow xa\leqslant xb,ax\leqslant bx,$$

称 $(S,\cdot,\leqslant)$ 是偏序半群 (partially ordered semigroup), 也有很多文献直接称之为序半群 (ordered semigroup). 这里为了以后叙述方便, 我们引入一些序半群的基本概念, 详细请参看作者的另一本著作《序半群引论》[126].

设 $(S,\cdot,\leqslant)$ 是序半群, A 为 S 的非空子集. A 称为 S 的 *左* (*右*) *理想*, 如果

1) $SA\subseteq A(AS\subseteq A)$;

2) $a\in A,S\ni b\leqslant a\Rightarrow b\in A$.

如果 A 既是 S 的左理想又是 S 的右理想, 称 A 为 S 的 *理想*.

S 的子半群 F 称为 S 的 *滤子*(filter), 如果

1) $a, b \in S, ab \in F \Rightarrow a \in F, b \in F$;

2) $a \in F, S \ni b \geqslant a \Rightarrow b \in F$.

设 S 序半群包含最大元 e, 称 S 为 *poe*- 半群. S 的元素 0 称为 S 的 零元, 如果 $0 \leqslant x$ 且 $0x = x0 = 0, \forall x \in S$.

设 $(S, \cdot, \leqslant), (T, \circ, \preceq)$ 为序半群, $\varphi: S \hookrightarrow T$ 是 S 到 T 的映射. φ 称为 保序的(isotone), 如果 $x, y \in S$, $x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y)$. φ 称为是 逆保序的(reverse isotone), 如果 $x, y \in S$, $\varphi(x) \preceq \varphi(y) \Rightarrow x \leqslant y$. 显然我们可以得到

2.5.1 练习 证明逆保序映射一定是单射.

以上 φ 称为是 同态(homomorphism), 如果 φ 是保序的且 $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\forall x, y \in S$. φ 称为 同构, 如果 φ 是满的, 逆保序的同态映射. 如果 S 和 T 之间存在同构映射, 称 S 和 T 同构, 记 $S \cong T$. 如果 S 和 T 的某个子集同构, 即存在映射 φ: $S \hookrightarrow T$ 且 φ 是逆保序同态, 称 S 可以嵌入 T.

设 $A \subset S$, 以下记 $(A] := \{t \in S \mid (\exists a \in A)\ t \leqslant a\}$. 本节我们讨论序半群中的 Fuzzy 子集的合成运算和序半群的嵌入问题.

2.5.2 定理 设 S 为序半群. 则 $(F(S), \circ, \leqslant)$ 是序半群, 这里 "$\circ$" 是 Fuzzy 集的合成运算, "$\leqslant$" 的定义见定义 1.1.4, 进一步地,

(1) 如果 S 为幺半群, 则 $(F(S), \circ, \leqslant)$ 为序幺半群;

(2) $(F(S), \circ, \leqslant)$ 是包含零元的 *poe*- 半群;

(3) S 可以嵌入 $(F(S), \circ, \leqslant)$ 中.

证 由练习 2.1.4, 以及定义 1.1.4, 我们不难得出 $(F(S), \circ, \leqslant)$ 是序半群且

(1) 如果 S 有单位元 e, 则

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in S, f \in F(S))\ (e_\lambda \circ f)(x) &= \bigvee_{x_1x_2=x} (e_\lambda(x_1) \wedge f(x_2)) \\
&= \bigvee_{ex_2=x} (\lambda \wedge f(x_2)) = \lambda \wedge f(x) \\
&= (f \circ e_\lambda)(x).
\end{aligned}
$$

取 $\lambda = 1$, $(e_1 \circ f)(x) = (f \circ e_1)(x) = f(x), \forall x \in S$. 因此 e_1 为 $F(S)$ 的单位元.

(2) 0 和 S 分别为 $(F(S), \circ, \leqslant)$ 的最小元和最大元.

(3) 作映射 $\varphi: S \hookrightarrow F(S) \mid x \hookrightarrow x_\lambda, \forall x \in S, \lambda \in (0, 1]$, 则 φ 是 S 到 $F(S)$ 的嵌入映射. 证毕. □

设 S 为序半群. $F(S)$ 关于乘法运算我们重新定义为: $*: F(S) \times F(S) \mid (f, g) \hookrightarrow f * g$, 这里 $f * g$ 定义 S 到 $[0,1]$ 的以下映射:

$$
(\forall x \in S)\ \ f * g(x) = \begin{cases} \bigvee_{y,z \in S, x \leqslant yz} (f(y) \wedge f(z)), & \text{如果存在 } y, z \text{ 使得 } x \leqslant yz; \\ 0, & \text{如果不存在 } y, z \text{ 使得 } x \leqslant yz. \end{cases}
$$

则我们类似于定理 2.4.2 得出以下定理:

2.5.3 定理 设 $(S,\cdot,\leqslant)$ 是序半群. 则 $(F(S),*,\leqslant)$ 是一个带有零元的 *poe*- 半群且 S 可同构嵌入到 $F(S)$ 中去.

证 (1) $(F(S),*)$ 是结合的. 设 x 不可表为形式 $x\leqslant yz$. 则对 $f,g,h\in F(S)$, $x\in S$, $[(f\circ g)\circ h](x)=[f\circ(g\circ h)](x)=0$.

设存在 $y,z\in S$, $x\leqslant yz$. 则

$$[(f\circ g)\circ h](x)=\sup_{x\leqslant yz}\{(f\circ g)(y)\wedge h(z)\}$$

$$=\begin{cases}\sup\limits_{x\leqslant yz}(\sup\limits_{y\leqslant uv}(f(u)\wedge g(v))\wedge h(z)), & \text{如果存在 } u,v \text{ 使得 } y\leqslant uv;\\ 0, & \text{如果不存在 } u,v \text{ 使得 } y\leqslant uv.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sup_{x\leqslant uvz}(f(u)\wedge g(v)\wedge h(z)), & \text{如果存在 } u,v,z \text{ 使得 } y\leqslant uvz;\\ 0, & \text{如果不存在 } u,v,z \text{ 使得 } y\leqslant uvz.\end{cases}$$

$$=f\circ(g\circ h)(x).$$

(2) $(F(S),\leqslant)$ 关于 “$*$” 是相容的. 设 $f,g,h\in F(S), f\leqslant g$, 则 $h*h\leqslant g*h$. 事实上, 当不存在 $y,z\in S$ 使得 $x\leqslant yz$, 则 $(f*h)(x)=0=(g*h)(x)$. 如果存在 $y,z\in S$ 使得 $x\leqslant yz$, 则

$$\begin{aligned}(f*h)(x)&=\bigvee_{x\leqslant yz}(f(y)\wedge h(z))\\&\leqslant\bigvee_{x\leqslant yz}(g(y)\wedge h(z))=(g*h)(x).\end{aligned}$$

因此, $f*h\leqslant g*h$. 类似地可以证 $h*f\leqslant h*g$.

(3) 0 和 S 是 $(F(S),*,\leqslant)$ 的零元和最大元, 因此 $(F(S),*,\leqslant)$ 是 *poe*- 半群.

(4) 下面我们定义映射 $\varphi:S\hookrightarrow F(S)\mid x\hookrightarrow f_x$, 这里 $f_x\in F(S)$ 定义如下:

$$f_x:\ S\hookrightarrow[0,1]\mid y\hookrightarrow f_x(y)=\begin{cases}1, & \text{如果 } y\leqslant x;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

A) φ 是可定义的. 设 $y_1=y_2$, 则 $f_x(y_1)=f_x(y_2)$. 事实上, 如果 $x\geqslant y_1$, 则 $f_x(y_1)-f_x(y_2)=1$, 否则 $f_x(y_1)-f_x(y_2)=0$, 所以 f_x 是可定义的. 如果 $x_1=x_2$, 显然 $f_{x_1}=f_{x_2}$.

B) φ 是同态映射. 首先设 $a,b\in S,a\leqslant b$. 则 $\varphi(a)=f_a\leqslant f_b=\varphi(b)$, 即 φ 是保序的. 任取 $y\in S$, 如果 $y\leqslant a$, 则 $y\leqslant b$, 因此 $f_a(y)=f_b(y)=1$. 如果 $y\nleqslant a$, $f_a(y)=0\leqslant f_b(y)$. 所以不论什么情况均有 $f_a(y)\leqslant f_b(y)$.

其次 φ 是保运算的，即 $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$，也即 $f_{ab} = f_a * f_b$. 任取 $y \in S$，如果 $y \leqslant ab$，则 $f_{ab}(y) = 1$，而

$$f_a * f_b(y) = \bigvee_{y \leqslant cd} (f_a(c) \wedge f_a(d)) \geqslant f_a(a) \wedge f_a(b) = 1,$$

只有 $f_{ab}(y) = f_a * f_b(y) = 1$. 如果 $y \nleqslant ab$，则 $f_{ab}(y) = 0$，而 $f_a * f_b(y) = \bigvee_{y \leqslant cd}(f_a(c) \wedge f_b(d))$，这里 $c \nleqslant a$ 和 $d \nleqslant b$ 一定有一个成立，否则 $y \leqslant cd \leqslant ab$ 和 $y \nleqslant ab$ 矛盾. 因此，$f_a * f_b(y) = \bigvee_{y \leqslant cd}(f_a(c) \wedge f_b(d)) = 0$. 综上所述，$f_a * f_b = f_{ab}$.

C) φ 是逆保序的. 设 $a, b \in S$ 且 $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$. 则如果 $x \leqslant a$，$f_a(x) = 1 \leqslant f_b(x)$ 得 $f_b(x) = 1$. 所以一定有 $x \leqslant b$. 取 $x = a$，有 $a \leqslant b$.

综合上述各款，完成证明. □

在以上讨论的嵌入定理中，如果序半群 $(S, \cdot, \leqslant)$ 中的序关系为平凡序，我们可以很自然地得到一般半群的嵌入定理.

2.6 序半群与 Fuzzy 子集

本节我们除引入序半群的 Fuzzy 滤子之外，还将半群中有关 Fuzzy 集的结论引入到序半群中.

2.6.1 定义 设 $(S, \cdot, \leqslant)$ 是序半群. S 的 Fuzzy 子集 f 称为 S 的 Fuzzy *左理想*，如果

1) $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$;

2) $f(xy) \geqslant f(y), \forall x, y \in S$.

如果将 2) 换成 $f(xy) \geqslant f(x)$ 可以得出 S 的 Fuzzy *右理想* 的定义. f 既是 Fuzzy 左理想又是 Fuzzy 右理想 f 称为 S 的 Fuzzy *理想*.

2.6.2 引理 设 A 为 S 序半群的非空子集. 则 $(A]$ 的特征函数满足:

$$x, y \in S, x \leqslant y \Rightarrow f_{(A]}(x) \geqslant f_{(A]}(y).$$

证 如果 $f_{(A]}(y) = 0$，显然 $f_{(A]}(x) \geqslant f_{(A]}(y)$，否则 $f_{(A]}(y) - 1$，因此 $y \in (A]$ 由假设 $x \leqslant y$，所以 $x \in (A]$，故 $f_{(A]}(x) - 1$. 不论怎样，只要 $x \leqslant y$，均有 $f_{(A]}(x) \geqslant f_{(A]}(y)$. 证毕. □

2.6.3 定理 设 A 为序半群 S 的非空子集. 则 $A = (A]$ 当且仅当 f_A 满足:

$$x, y \in S, x \leqslant y \Rightarrow f_A(x) \geqslant f_A(y).$$

证 由引理 2.6 2，必要性显然. 反之，因为 $A \subseteq (A]$，我们仅证 $(A] \subseteq A$. 设 $x \in (A]$，存在 $y \in A$ 使得 $x \leqslant y$. 由假设，$f_A(x) \geqslant f_A(y) = 1$. 因此 $f_A(x) = 1$，即 $x \in A$. 证毕. □

滤子在半群素理想的刻画中起到非常重要的作用. 在序半群的研究中, 我们将半群的滤子拓广为序半群的序滤子 (也称滤子) 以便刻画序半群的素理想. 下面在序半群中引入 Fuzzy 滤子的概念.

2.6.4 定义 设 $(S,\cdot,\leqslant)$ 为序半群. S 的一个 Fuzzy 子集 f 称为 Fuzzy 滤子, 如果

1) $x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$;

2) $f(xy)=f(x)\wedge f(y),\forall x,y\in S$.

显然 Fuzzy 滤子 f 也为 S 的 Fuzzy 子半群.

2.6.5 定理 设 S 为序半群, $\emptyset\neq F\subseteq S$. 则 F 为 S 的滤子当且仅当 f_F 为 S 的 Fuzzy 滤子.

证 必要性. 设 $x,y\in S,x\leqslant y$. 如果 $x\notin F$, 则 $f_F(x)=0\leqslant f_F(y)$. 如果 $x\in F$, 由 F 为滤子得 $y\in F$, 所以 $f_F(x)=f_F(y)=1$. 因此条件 (1) 成立.

为验证条件 (2), 设 $x,y\in S$. 如果 $xy\notin F$, 则 $x\notin F$ 或 $y\notin F$. 因此 $f_L(xy)=f_L(x)\wedge f_L(y)=0$. 设 $xy\in F$, 则 $x\in F$ 且 $y\in F$, 因此 $f_L(xy)=f_L(x)\wedge f_L(y)=1$.

充分性. 设 f_F 为 Fuzzy 滤子, $x,y\in F$. 则 $f_F(xy)=f_F(x)\wedge f_F(y)=1$, 因此 $xy\in F$, 即 F 为子半群. 另一方面, 设 $xy\in F$. 则 $f_F(x)\wedge f_F(y)=1$, 因此 $x\in F$ 且 $y\in F$.

设 $x\in F,S\ni y\geqslant x$, 由 $x\in F$ 得 $f_F(x)=1$. 因为 $x\leqslant y$, f_F 为 Fuzzy 滤子得 $f_F(x)\leqslant f_F(y)$. 所以 $f_F(y)=1$, 即 $y\in F$. 证毕. □

设 S 为序半群, $f\in F(S)$. $f'=1-f$ 称为 f 在 S 中补. 则

2.6.6 练习 设 S 为半群, $f\in F(S)$. 则下列各款等价:

(1) $f(xy)=f(x)\wedge f(y),\forall x,y\in S$;

(2) $f'(xy)=f'(x)\vee f'(y),\forall x,y\in S$.

2.6.7 定理 设 $(S,\cdot,\leqslant)$ 为序半群, $f\in F(S)$. 则 f 为 S 的 Fuzzy 滤子当且仅当 f 的补 f' 为 Fuzzy 理想且满足:

$$f'(xy)=f'(x)\vee f'(y),\forall x,y\in S.$$

证 必要性. 设 $x,y\in S,x\leqslant y$. 因为 f 为 Fuzzy 滤子, $f(x)\leqslant f(y)$. 因此 $f'(x)=1-f(x)\geqslant 1-f(y)=f'(y)$. 任取 $x,y\in S$, 因为 f 为 S 的 Fuzzy 滤子, 所以 $f(xy)=f(x)\wedge f(y)$ 由练习 2.6.6, $f'(xy)=f'(x)\vee f'(y)$.

充分性. 设 $x,y\in S,x\leqslant y$. 因为 f' 为 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $f'(x)\geqslant f'(y)\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$. 又 f' 满足: $f'(xy)=f'(x)\vee f'(y)$, 所以 $f(xy)=f(x)\wedge f(y)$. 由 Fuzzy 滤子的定义, f 为 S 的 Fuzzy 滤子. 证毕. □

2.7 评　述

本章的内容一方面为以后的章节提供必要的基础，另一方面所涉及的内容有自己的相对独立性．我们可以从以下几个方面进一步地开展研究．

(1) 如同在第 1 章我们提到，本章的相关结论我们可以进一步推广到完全分配格上．定义 LF- 子半群，从而得出类似的结论，但是 [0,1] 区间所拥有的代数性质和完全分配格的代数性质还不是完全一致的，所以这种推广是有意义的．

(2) 在 Fuzzy 代数的构建中，埃及数学家 K.A. Dib 在 1994 年 (Inform. Sci. 80(1994), 253~282) 提出 Fuzzy 空间的概念，它比我们通常的 Fuzzy 集的概念更加广义，在 Fuzzy 空间的基础上进一步引入 Fuzzy 空间上的 Fuzzy 卡氏积、Fuzzy 函数、Fuzzy 二元运算，进而引入 Fuzzy 半群和 Fuzzy 群．这是一套新的系统，有一系列的论文开展该领域的研究 [17]．

(3) 和 Fuzzy 半群相关的研究领域，同时也是发展较晚的还有 Fuzzy 图 [92]，由群作用到群作用到 Fuzzy 子集，进一步到 Fuzzy S- 系 [93]．

(4) 半群是群的推广，如果我们将半群中的二元运算换为 n 元运算我们可以得到带有 n 元运算的代数系统的 Fuzzy 特征 [20]．如果将 Fuzzy 性的描述换为直觉 Fuzzy 性，定义半群上的直觉 Fuzzy 子半群，我们可以得出一些新的结论．

第3章　Fuzzy 理想

本章试图讲述半群的 Fuzzy 理论中最基本的概念之一 —— 半群的 Fuzzy 理想. 内容包括 Fuzzy 理想的性质, Fuzzy 理想对半群结构的影响, Fuzzy 理想的生成以及相关的介绍了一类特殊的 Fuzzy 理想 —— 正规 Fuzzy 理想.

3.1　Fuzzy 理想

本节我们给出 Fuzzy 理想, 包括 Fuzzy 左 (右) 理想, Fuzzy 内禀理想, Fuzzy 双理想等的定义及其基本性质.

3.1.1 定义　半群 S 的 Fuzzy 子集 f 称为 S 的 Fuzzy 左 (右) 理想, 如果

$$(\forall x, y \in S)\ \ f(xy) \geqslant f(y)(f(x)).$$

如果 f 既为 S 的 Fuzzy 左理想又为 S 的 Fuzzy 右理想, 称 f 为 S 的 Fuzzy 理想.

3.1.2 定义　半群 S 的 Fuzzy 子半群 f 称为 S 的 Fuzzy *内禀理想*, 如果 $(\forall x, a, y \in S)\ \ f(xay) \geqslant f(a)$.

3.1.3 定义　半群 S 的 Fuzzy 子半群 f 称为 S 的 Fuzzy *双理想*, 如果

$$(\forall x, y, z \in S)\ \ f(xyz) \geqslant \min\{f(x), f(z)\}.$$

3.1.4 定理　设 A 为半群 S 的非空子集, f_A 为的特征函数. 则

(1) A 为 S 的 Fuzzy 子半群当且仅当 f_A 为 S 的 Fuzzy 子半群;

(2) A 为 S 的左 (右) 理想当且仅当 f_A 为 S 的 Fuzzy 左 (右) 理想;

(3) A 为 S 的理想当且仅当 f_A 为 S 的 Fuzzy 理想;

(4) A 为 S 的内禀理想当且仅当 f_A 为 S 的 Fuzzy 内禀理想;

(5) A 为 S 的双理想当且仅当 f_A 为 S 的 Fuzzy 双理想.

证　我们仅证 (1) 和 (3), 其他留给读者练习.

(1) 设 A 为 S 的子半群. 设 $x_\lambda, y_\mu \in f_A$ 且 $x_\lambda \neq 0, y_\mu \neq 0$. 只有 $\lambda = \mu = 1$ 且 $x, y \in A$. 因此 $xy \in A$, 且 $x_\lambda \circ y_\mu = (xy)_{\lambda\wedge\mu} \in f_A$.

反之, 如果 f_A 为 S 的 Fuzzy 子半群. 设 $x, y \in A$, 则 $f_A(xy) \geqslant \min\{f_A(x), f_A(y)\}$ 1. 只有 $f_A(xy) = 1$. 因此 $xy \in A$.

(3) 设 A 为 S 的内禀理想, 任取 $x, a, y \in A$. 如果 $a \in A$, 则 $xay \in SAS \subseteq A$. 因此 $f_A(xay) = f_A(a)$. 如果 $a \notin A$, 则 $f_A(xay) \geqslant 0 - f_A(a)$. 由定理 2.1 6 及定义 3.1.2, f_A 为 S 的 Fuzzy 内禀理想.

反之，设 f_A 为 S 的 Fuzzy 内禀理想，则由 (1) 的证明，A 为 S 的子半群. 对 $\forall z \in SAS$, 存在 $x, y \in S$, $a \in A$ 使得 $z = xay$. 因为 $a \in A$, 所以由 $f_A(xay) \geqslant f_A(a) = 1$ 得 $f_A(xay) = 1$, 从而 $xay \in A$, 因此 $SAS \subseteq A$. 证毕. □

类似于定理 3.1.4, 我们有

3.1.5 定理 设 S 为序半群，$\emptyset \neq L \subseteq S$. 则 L 为的左理想当且仅当 f_L 为 S 的 Fuzzy 理想.

证 必要性. 设 $x, y \in S, x \leqslant y$. 如果 $y \notin L$, 则 $f_L(y) = 0$, 因此 $f_L(x) \geqslant f_L(y)$. 如果 $y \in L$, 因为 L 为 S 的左理想得 $x \in L$. 因此 $f_L(x) = f_L(y) = 1$, 也有 $f_L(x) \geqslant f_L(y)$.

充分性. 设 $y \in L, S \ni x \leqslant y$. 因为 f_L 是 S 的 Fuzzy 左理想且 $x \leqslant y$, 所以 $f_L(x) \geqslant f_L(y) = 1$. 因此 $f_L(x) = 1, x \in L$.

证明的剩余部分是定理 3.1.4 的结果. 证毕. □

对偶地，我们得出 R 为 S 的右理想当且仅当 f_R 为 S 的 Fuzzy 右理想.

3.1.6 练习 *设 S 为序半群，$\emptyset \neq I \subseteq S$. 则 I 为 S 的理想当且仅当 f_I 为 S 的 Fuzzy 理想.*

设 S 为半群，$a \in S$ 则由 a 生成的左理想 $L(a)$、右理想 $R(a)$、理想 (a)、双理想 $B(a)$、内禀理想 $I(a)$ 分别为

$$\begin{aligned} L(a) &= Sa \cup \{a\} = S^1 a, \ R(a) = aS^1, \\ (a) &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\}, \\ B(a) &= aSa \cup \{a, a^2\}, I(a) = SaS \cup \{a, a^2\}. \end{aligned}$$

设 S 为半群, 如果对 S 中任意元 a, 存在 $x \in S$ 使得 $a = axa$, a 称为 S 的*正则元*. 如果 S 这的每个元素都是正则的，S 称为*正则半群*. S 称为*左舵*(*右舵*) 的，如果 S 的每个左 (右) 理想为 S 的右 (左) 理想. S 称为*舵*的，如果 S 是左舵的和右舵的. 进一步地我们有

3.1.7 定义 S 称为 Fuzzy *左舵*(Fuzzy *右舵*) 的，如果 S 的每个 Fuzzy 左 (右) 理想为 S 的 Fuzzy 右 (左) 理想. S 称为 Fuzzy *舵*的，如果 S 是 Fuzzy 左舵的和 Fuzzy 右舵的.

3.1.8 练习 *证明每个左 (右)Fuzzy 理想 (Fuzzy 理想) 是 Fuzzy 双理想.*

3.1.9 定理 设 S 是正则半群. 则下列各款是等价的:

(1) S 是左舵的;

(2) S 是 Fuzzy 左舵的.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $f \in F(S)$ 为 S 的 Fuzzy 左理想，任取 $a, b \in S$. 因为 S 为左舵及正则的，所以 $a \in aSa$ 且 Sa 为 S 的理想，$ab \in (aSa)b \subseteq (Sa)S \subseteq Sa$, 存

在 $x \in S$ 使得 $ab = xa$. 由假设 $f(ab) = f(xa) \geqslant f(a)$. 这意味着 f 也为 S 的 Fuzzy 右理想.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 S 是 Fuzzy 左舵的, A 为 S 的左理想. 由定理 3.1.4, f_A 是 S 的 Fuzzy 左理想, 因此 f_A 也为 S 的 Fuzzy 右理想, 再由定理 3.1.4, A 为 S 的右理想. 证毕. □

对偶地我们考虑右舵的情况. 进一步地, 我们有

3.1.10 练习　*对正则半群 S, S 是舵的当且仅当 S 是 Fuzzy 舵的.*

我们知道, 每个左 (右) 理想一定是双理想. 进一步地, 设 $f \in F(S)$ 为 S 的 Fuzzy 左理想. 则

$$(\forall x, y, z \in S)\ \ f(xyz) \geqslant f((xy)z) \geqslant f(z) \geqslant \min\{f(x), f(z)\},$$

因此 f 为 Fuzzy 双理想. 类似地可得每个 Fuzzy 右理想也是 Fuzzy 双理想. 进一步地,

3.1.11 定理　设 S 为正则半群. 下列各款等价:

(1) S 的每个双理想是右 (左) 理想;

(2) S 的每个双理想是 Fuzzy 右 (左) 理想.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想, $a, b \in S$. aSa 为 S 的双理想. 由假设 aSa 为 S 的右理想, 因此 $(aSa)S \subseteq aSa$. 又因为 S 是正则的, 所以 $ab \in (aSa)S \subseteq aSa$, 即存在 $x \in S$, 使得 $ab = axa$.

$$f(ab) = f(axa) \geqslant \min\{f(a), f(a)\} = f(a).$$

所以 f 为 S 的 Fuzzy 右理想.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 A 为 S 的双理想. 由定理 3.1.4, f_A 为 S 的 Fuzzy 双理想. 根据假设 (2), f_A 为 S 的 Fuzzy 右 (左) 理想. 再由定理 3.1.4, A 为 S 的右 (左) 理想. 证毕. □

设 S 为正则舵半群, A 为 S 的双理想. 则 $SA \subseteq S(ASA) = S(AS)A$. 因为 AS 为 S 的右理想, 所以 AS 也为 S 的左理想, 从而 $S(AS)A \subset ASA \subseteq A$, 即 $SA \subseteq A$, $S^1A = A \cup SA \subseteq ASA \cup SA \subseteq SA \subseteq A$, 故 A 为 S 的左理想. 根据定理 3.1.11, 我们有

3.1.12 推论　设 S 为正则舵半群. 则 S 的每个 Fuzzy 双理想是 Fuzzy 左理想.

3.1.13 定义　半群 S 称为*右 (左) 零*的, 如果 $(\forall x, y \in S)\ \ xy = y\ (xy = x)$.

3.1.14 定理　设 S 为正则半群. 则下列各款是等价的:

(1) S 的幂等元集 $E(S)$ 是的左零子半群;

(2) 对 S 的任意 Fuzzy 左理想, 等式 $(\forall e, e_1 \in E(S))\ \ f(e) = f(e_1)$ 成立.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $E(S)$ 为左零子半群. 则

$$(\forall e, e_1 \in E(S)) \ \ ee_1 = e, e_1e = e_1,$$

因此

$$f(e) = f(ee_1) \geqslant f(e_1) = f(e_1e) \geqslant f(e).$$

故 $f(e) = f(e_1)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 (2) 成立, $e, e_1 \in E(S)$. 则 e 生成的左理想 $L(e)$ 的特征函数 $f_{L(e)}$ 为 S 的 Fuzzy 左理想. 因此 $f_{L(e)}(e) = f_{L(e)}(e_1) = 1$, 则 $e_1 \in L(e) = Se$, 即存在 $x \in S$ 使得 $e_1 = xe = xee = e_1e$. 故 $E(S)$ 为左零半群. 证毕. □

同理我们可以考虑右零的情况, 特别地

3.1.15 推论 设 S 为带. 则下列各款等价:

(1) S 为左零半群;

(2) 对 S 的任意 Fuzzy 左理想 f, $f(x) = f(y), \forall x, y \in S$.

3.1.16 定理 设 S 为半群. 则下列各款等价:

(1) S 为群;

(2) S 的任意 Fuzzy 双理想是常值函数.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想. 则

$$(\forall x, y \in S) \ \ f(x) = f(y^{-1}(yx)) \geqslant f(y).$$

由 x, y 的任意性得 $f(x) = f(y)$, 即 f 为常值函数.

(2) $\Longrightarrow$ (1). $\forall a \in S, Sa$ 为 S 的左理想, 所以 Sa 也为 S 的双理想, Sa 的特征函数 f_{Sa} 为 S 的 Fuzzy 双理想. 根据假设 $f_{Sa}(x) = 1, \forall x \in S$. 因此 $Sa = S$. 同理可证 $aS = S$. 以上证得 S 为群. 证毕. □

进一步地, 我们有

3.1.17 定理 设 S 为正则半群. 则下列各款等价:

(1) S 为群;

(2) 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想. 则 $(\forall e_1, e \in E(S)) \ \ f(e_1) = f(e)$.

证 (1) $\longrightarrow$ (2). 由定理 3.1.16, 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想. 则 f 为常值函数, 因此 $(\forall e_1, e \in E(S)) \ \ f(e_1) = f(e)$.

(2) $\longrightarrow$ (1). 设 $e, e_1 \in E(S)$. S 中任意一个元素 x 生成的双理想 $B(x) = xSx \cup \{x\} \cup \{x^2\}$. 由于 S 是正则的, 所以 $B(x) = xSx$. 由定理 3.1.4, $f_{B(x)}$ 为 S 的 Fuzzy 双理想. 因为 $e \in B(e)$, 所以 $f_{B(e)}(e) = f_{B(e)}(e_1) = 1$. 因此 $e_1 \in B(e) = eSe$, 即存在 $x \in S$ 使得 $e_1 = exe$. 类似地可证明存在 $y \in S$ 使得 $e = e_1ye_1$. 综上所得,

$$e_1 = exe = exee = e_1e = e_1(e_1ye_1) = e_1ye_1 = e.$$

这证明了 S 有唯一的幂等元. $\forall a\in S$, 存在 $x\in S$ 使得 $a=axa$. 因为 ax, xa 均为幂等元, 所以 $ax=xa=e$. 故 $ae=a(xa)=a=ea$, 即 e 为单位元, x 为 a 的逆. 以上得出 S 为群. □

3.1.18 练习 *设 f 为正则半群 S 的 Fuzzy 子集. 则下列各款等价:*

(1) f 为 Fuzzy 理想;

(2) f 为 Fuzzy 内seg理想.

3.2 Fuzzy 理想的另一表示

本节给出 Fuzzy 理想等概念的另外一种表述形式, 如同上节中表述一个半群 S 的 Fuzzy 子半群 f 为 $f\circ f\leqslant f$ 一样, 这种表述非常类似于将 S 的子半群 A 表述为 $A\cdot A\subseteq A$. 本节我们给出 Fuzzy 左 (右) 理想、 Fuzzy 双理想、 Fuzzy 广义双理想等的等价表述.

下面我们也用 S 表示函数: $S(x)=1, \forall x\in[1,0]$.

3.2.1 定理 S 的一个 Fuzzy 子集 f 为 Fuzzy 左理想当且仅当 $S\circ f\leqslant f$.

证 设 f 为 S 的 Fuzzy 左理想. 任取 $a\in S$, 如果 $S\circ f(a)=0$, 显然 $S\circ f(a)\leqslant f(a)$. 否则 $a=xy, x, y\in S$.

$$\begin{aligned} S\circ f(a) &= \sup_{a=xy}(S(x)\wedge f(y)) \\ &= \sup_{a=xy} f(y)\leqslant \sup_{a=xy} f(xy) \\ &= f(a), \end{aligned}$$

因此 $S\circ f\leqslant f$.

反之, 设 $S\circ f\leqslant f$. 则

$$\begin{aligned} (\forall x, y\in S)\ \ f(xy) &= f(a)\geqslant S\circ f(a) \\ &= \sup_{bc=a}(S(b)\wedge f(c))\geqslant S(x)\wedge f(y)=f(y). \end{aligned}$$

由 Fuzzy 左理想的定义, f 为 Fuzzy 左理想. 证毕. □

类似地, 我们有

3.2.2 定理 S 的一个 Fuzzy 子集 f 为 Fuzzy 右理想当且仅当 $f\circ S\leqslant f$. S 的一个子集 f 为 Fuzzy 理想当且仅当 $f\circ S\leqslant f$ 且 $S\circ f\leqslant f$.

3.2.3 定理 S 的一个 Fuzzy 子集 f 为 S 的 Fuzzy 双理想当且仅当 $f\circ f\leqslant f$ 且 $f\circ S\circ f\leqslant f$.

证 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想. 则 f 为 S 的 Fuzzy 子半群, 因此 $f\circ f\leqslant f$.

又设 $a \in S$. 如果 $f \circ S \circ f(a) = 0$, 则 $f \circ S \circ f(a) \leqslant f(a)$. 否则存在 $x, y, p, q \in S$ 使得 $a = xy, x = pq$. 因为 f 为 Fuzzy 双理想，所以 $f(pqy) \geqslant f(p) \wedge f(y)$. 因此，

$$\begin{aligned} f \circ S \circ f(a) &= \sup_{xy=a} ((f \circ S)(x) \wedge f(y)) \\ &= \sup_{xy=a} ((\sup_{pq=x} (f(p) \wedge S(q)) \wedge f(y)) \\ &= \sup_{xy=a} \sup_{pq=x} (f(p) \wedge S(q) \wedge f(y)) \\ &= \sup_{xy=a} \sup_{pq=x} (f(p) \wedge f(y)) \\ &\leqslant \sup_{xy=a} \sup_{pq=x} f(pqy) = \sup_{xy=a} f(xy) \\ &= f(a), \end{aligned}$$

故 $f \circ S \circ f \leqslant f$.

反之，由 $f \circ f \leqslant f$ 及定义 2.1.5, f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 根据 $f \circ S \circ f \leqslant f$,

$$\begin{aligned} (\forall x, y, z \in S) \ \ f(xyz) &= f(a) \geqslant (f \circ S \circ f)(a) \\ &= \sup_{bc=a} ((f \circ S(b) \wedge f(c)) \\ &\geqslant (f \circ S)(xy) \wedge f(z) \\ &\geqslant f(x) \wedge S(y) \wedge f(z) = f(x) \wedge f(y). \end{aligned}$$

因此，f 为 Fuzzy 双理想. 证毕. □

类似于上定理的证明，我们有

3.2.4 定理　半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 为广义 Fuzzy 双理想当且仅当 $f \circ S \circ f \leqslant f$.

我们注意到每个 Fuzzy 双理想是广义 Fuzzy 双理想. 反之结论不成立，我们有反例.

3.2.5 例　设 $S = \{a, b, c, d\}$, S 上的乘法表如下：

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

设 f 为 S 的 Fuzzy 子集且 $f(a) = 0.5, f(b) = 0, f(c) = 0.2, f(d) = 0$. 则 f 为广

义 Fuzzy 双理想，但是 f 不是 Fuzzy 双理想，因为 f 不是 Fuzzy 子半群. 事实上,

$$f(c^2) = f(b) = 0 < \min\{f(c), f(c)\} = 0.2.$$

3.2.6 定理　半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 为 Fuzzy 内窠理想当且仅当 $S \circ f \circ S \leqslant f$ 且 $f \circ f \leqslant f$

证　设 f 为 Fuzzy 子集且为 Fuzzy 内窠理想. 则 f 为 Fuzzy 子半群, 即 $f \circ f \leqslant f$, 且对任意 $a \in S$, 如果 $S \circ f \circ S(a) = 0$, 则 $S \circ f \circ S(a) \leqslant f(a)$. 否则, 存在 $p, q, r, w \in S$ 使得 $a = pq$, $p = rw$.

$$\begin{aligned}(S \circ f \circ S)(a) &= \sup_{pq=a}((S \circ f)(p) \wedge S(q)) \\ &= \sup_{pq=a}((\sup_{rw=p}(S(r) \wedge f(w)) \\ &= \sup_{pq=a}\sup_{rw=p} f(w) \\ &= \sup_{rwq=a} f(w) \leqslant \sup_{rwq=a} f(a) = f(a).\end{aligned}$$

因此, $S \circ f \circ S \leqslant f$.

反之, 由 $f \circ f \leqslant f$ 得 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 又设 $x, y, z \in S$, 记 $xyz = a$. 则由假设,

$$\begin{aligned}f(xyz) &= f(a) \geqslant S \circ f \circ S(a) \\ &= \sup_{pq=a}(\sup_{rw=p}(S(r) \wedge f(w)) \leqslant S(x) \wedge f(y) = f(y).\end{aligned}$$

由 Fuzzy 内窠理想的定义, f 为 Fuzzy 内窠理想. 证毕. □

3.2.7 注　一个半群的 Fuzzy 理想一定是 Fuzzy 内窠理想, 但是 Fuzzy 内窠理想一般情况下不一定为 Fuzzy 理想. 作为练习, 读者可以先举例说明半群的内窠理想不是理想, 再进一步得出 Fuzzy 内窠理想不是 Fuzzy 理想.

本节最后我们讨论一下 Fuzzy 理想的常见运算.

3.2.8 定理　设 S 为半群, A, B 为 S 的非空子集. 则 A, B 的特征函数 f_A 与 f_B 满足:

(1) $f_A \cap f_B = f_{A \cap B}$;

(2) $f_A \circ f_B = f_{AB}$;

(3) $f_A \cup f_B = f_{A \cup B}$.

证　(1) 设 $a \in A \cap B$. 则 $(f_A \cap f_B)(a) = f_A(a) \wedge f_B(a) = 1$. 如果 $a \notin A \cap B$, 则 $a \notin A$ 或 $a \notin B$, 因此 $(f_A \cap f_B)(a) = f_A(a) \wedge f_B(a) = 0$. 故 $f_A \cap f_B \quad f_{A \cap B}$. 同理可证 (3) 成立.

(2) $\forall x \in S$, 如果 $x \in AB$, 则存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $x = ab$,

$$\begin{aligned} f_A \circ f_B(x) &= \sup_{yz=x} (f_A(y) \wedge f_B(z)) \\ &\geqslant f_A(a) \wedge f_B(b) = 1, \end{aligned}$$

因此 $f_A \circ f_B(x) = 1$.

当 $x \notin AB$ 时有两种情况:

(i) x 可以表为 S 中的两个元素之积, 即存在 $y_0, z_0 \in S$ 使得 $x = y_0 z_0$. 这时必有 $y \notin A$ 或 $z \notin B$.

$$\begin{aligned} f_A \circ f_B(x) &= \sup_{yz=x} (f_A(y) \wedge f_B(z)) \\ &\geqslant \sup_{yz=x} (1 \wedge 0) = 0. \end{aligned}$$

(ii) x 不可表为 S 中的两个元素之积, 这时必有 $f_A \circ f_B(x) = 0$. 综上所述得出 $f_A \circ f_B = f_{AB}$. 证毕. □

3.2.9 定理 设 S 为半群, f, g 为 S 的 Fuzzy 理想, 则 $f \cap g$ 也为 S 的 Fuzzy 理想.

证 设 $a, b \in S$ 且 f, g 均为 S 的 Fuzzy 理想. 则

$$\begin{aligned} (f \cap g)(ab) &= f(ab) \wedge g(ab) \\ &\geqslant \max(f(a), f(b)) \wedge \max(g(a), g(b)) \\ &\geqslant f(a) \wedge g(a), f(b) \wedge g(b). \end{aligned}$$

因此 $(f \cap g)(ab) \geqslant \max\{(f \cap g)(a), (f \cap g)(b)\}$. 由 Fuzzy 理想的定义得出 $f \cap g$ 也为的 Fuzzy 理想. □

3.2.10 注 在上定理中, f, g 可以换成 Fuzzy 子半群、Fuzzy 双理想、Fuzzy 内部理想等, 我们也可以得出类似的结果. 同理, 也可以讨论 $f \cup g$ 的情形. 如果记 $FI(S)$ 为 S 上的 Fuzzy 理想集, 则 $FI(S)$ 关于上面的 "$\cap$" 和 "$\cup$" 运算构成一个完备分配格.

3.2.11 引理 设 S 为半群, f 为 S 的 Fuzzy 子集, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为 S 的 Fuzzy 子集簇. 则

(1) $f \circ (\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} f \circ f_\alpha$;

(2) $f \circ (\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} f \circ f_\alpha$.

证 (1) 设 $x \in S$, 如果 x 不能表为 S 中的两个元素之积, 则

$$f \circ \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha \right)(x) = \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} f \circ f_\alpha \right)(x) = 0.$$

否则

$$\left(f\circ\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)\right)(x)=\bigvee_{yz=x}\left(f(y)\wedge\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)(z)\right)$$
$$=\bigvee_{yz=x}\left(f(y)\wedge\bigvee_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(z)\right)$$
$$=\bigvee_{\alpha\in\Gamma}\bigvee_{yz=x}(f(y)\wedge f_\alpha(z))$$
$$=\bigvee_{\alpha\in\Gamma}(f\circ f_\alpha)(x)=\left(\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f\right)\circ f_\alpha\right)(x).$$

因此，$f\circ(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f\circ f_\alpha$.

(2) 设 $x\in S$. 如果 x 不能表为 S 中的两个元素之积，则

$$f\circ\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)(x)=0\leqslant\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f\circ f_\alpha\right)(x)=0.$$

否则

$$\left(f\circ\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)\right)(x)=\bigvee_{yz=x}\left(f(y)\wedge\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha\right)(z)\right)$$
$$=\bigvee_{yz=x}\left(f(y)\wedge\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(z)\right)$$
$$\leqslant\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\left(\bigvee_{yz=x}(f(y)\wedge f_\alpha(z)\right)$$
$$=\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}(f\circ f_\alpha)(x)=\left(\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f\right)\circ f_\alpha\right)(x).$$

因此 $f\circ(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha)\leqslant\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f\circ f_\alpha$. 证毕. □

3.2.12 练习　(1) 设 S 为半群，$f\in F(S)$. 则 f 生成的 Fuzzy 左理想为 $L(f)$:

$$(\forall x\in S)\ \ L(f)(x)=\begin{cases}\sup\limits_{n\in N}\{f(x_1)\vee\cdots\vee f(x_{n-1}))\wedge f(x_n)\mid x_1x_2\cdots x_n=x\}, \\ \qquad\qquad n>1;\\ f(x), x\text{ 不可表为 }S\text{ 中多于两个元素之积}.\end{cases}$$

同理，f 生成 S 的 Fuzzy 右理想 $R(f)$:

$$(\forall x\in S)\ \ R(f)(x)=\begin{cases}\sup\limits_{n\in N}\{f(x_1)\wedge(f(x_2)\vee\cdots\vee f(x_n))\mid x_1x_2\cdots x_n=x\}, \\ \qquad\qquad n>1;\\ f(x),\ x\text{ 不可表为 }S\text{ 中多于两个元素之积}.\end{cases}$$

(2) 证明

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha\right)\circ\left(\bigcup_{\beta\in\Lambda} f_\beta\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma,\beta\in\Lambda} f_\alpha\circ f_\beta.$$

3.2.13 定理 设 f 为半群 S 的 Fuzzy 子集. 则 $f\cup S\circ f$ 为 S 的 Fuzzy 左理想.

证 因为

$$\begin{aligned}S\circ(f\cup S\circ f)&\subseteq S\circ f\cup S\circ(S\circ f)\\&=S\circ f\cup(S\circ S)\circ f\subseteq S\circ f\cup S\circ f=S\circ f\\&\subseteq f\cup S\circ f,\end{aligned}$$

所以 $f\cup S\circ f$ 为 S 的 Fuzzy 左理想. 证毕. □

类似上定理, 可以证明

3.2.14 练习 设 f 为 S 的 Fuzzy 左理想. 则 $f\cup f\circ S$ 为 S 的 Fuzzy 理想.

3.2.15 定理 设 f 和 g 为的 Fuzzy 理想. 则 $f\circ g$ $(g\circ h)$ 也为 S 的 Fuzzy 理想.

证 因为 $S\circ(f\circ g)=(S\circ f)\circ g\subseteq f\circ g$, $(f\circ g)\circ S=f\circ(g\circ S)\subseteq f\circ g$, 所以 $f\circ g$ 是 S 的 Fuzzy 左理想且为 S 的 Fuzzy 右理想, 即为 S 的 Fuzzy 理想. 证毕. □

3.2.16 练习 在定理 3.2.15 中, f,g 换为 Fuzzy 双理想, Fuzzy 内部理想情况如何?

我们在定理 3.1.8 中已给定了 Fuzzy 子半群与 S 的子半群之间的关系, 这是 Fuzzy 系统和经典系统之间的桥梁和纽带, 很多 Fuzzy 代数系统具有该特征, 例如

3.2.17 定理 设 f 为 S 的 Fuzzy 子集. f 为 Fuzzy 理想当且仅当 f 的每个 λ- 截集 f_λ 只要不为空, 均为 S 的理想, $\forall\lambda\in[0,1]$.

证 设 f 为 S 的 Fuzzy 理想. 由于 $f(x)\geqslant\lambda$ 且 $f(xy)\geqslant f(x)\geqslant\lambda$ 得 $xy\in f_\lambda$. 同理可以得出 $yx\in f_\lambda$. 因此 f_λ 为 S 的理想.

反之, 设 f_λ 为的理想, $\forall\lambda\in[0,1]$. 由 Fuzzy 集的分解定理 $f=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_\lambda$ 得对任意取定的 $x,y\in S$, 设 $f(t)=t$, 则 $tf_t(x)=t$. 因为 f_t 为 S 的理想, 因此由 $x\in f_t$ 得 $xy,yx\in f_t$. 因此

$$f(xy)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_\lambda(xy)=tf_t(xy)=t=f(x).$$

同理,

$$f(yx)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_\lambda(yx)\geqslant tf_t(yx)=t=f(x).$$

故 f 为 S 的 Fuzzy 理想. 证毕. □

本节的最后我们讨论另一类 Fuzzy 理想的表述. 我们知道, 一个半群 S 的非空子集 Q 称为拟理想, 如果 $QS \cap SQ \subseteq Q$ 这个概念被 Kuroki 推广到 Fuzzy 情况.

3.2.18 定义　设 f 为半群 S 的 Fuzzy 子集. f 称为 Fuzzy 拟理想, 如果 $f \circ S \cap S \circ f \subseteq f$.

容易看出 S 的 Fuzzy 左 (右) 理想是 Fuzzy 拟理想.

3.2.19 练习　(1) 证明一个半群 S 的 Fuzzy 双理想是 Fuzzy 拟理想.

(2) 举例说明一般情况 Fuzzy 拟理想不一定是 Fuzzy 左 (右) 理想, Fuzzy 拟理想也不一定为 Fuzzy 双理想.

3.2.20 定理　设 Q 为半群 S 的非空子集. 则 Q 为 S 的拟理想当且仅当 f_Q 为 S 的 Fuzzy 拟理想.

证　设 Q 为 S 的拟理想, $a \in S$. 如果 $a \in Q$, 则

$$((f_Q \circ S) \cap (S \circ f_Q))(a) \geqslant 1 = f_Q(a).$$

假如 $a \notin Q$. 则 $f_Q(a) = 0$. 假设 $((f_Q \circ S) \cap (S \circ f_Q))(a) \neq 0$, 则

$$\sup_{a=pq}[\min\{f_Q(p), S(q)\}] = (f_Q \circ S)(a) \neq 0,$$

且

$$\sup_{a=pq}[\min\{f_Q(q), S(p)\}] = (S \circ f_Q)(a) \neq 0,$$

这意味着存在 $b, c, d, e \in S$ 使得 $a = bc = de$ 且 $f_Q(b) = f_Q(e) \neq 0$, 只有 $f_Q(b) = f_Q(e) = 1$. 因此 $a = bc = de \in QS \cap SQ \subseteq Q$, 和假设矛盾. 因此,

$$((f_Q \circ S) \cap (S \circ f_Q))(a) = 0 = f_Q(a).$$

综上所得, $(f_Q \circ S) \cap (S \circ f_Q) \subseteq f_Q$.

反之, 假设 f_Q 是 S 的 Fuzzy 拟理想, $a \in QS \cap SQ$. 则存在 $s, t, b, c \in S$ 使得 $a = bs = tc$. 因此

$$\begin{aligned}(f_Q \circ S)(a) &= \sup_{a=pq}[\min\{f_Q(p), S(q)\}] \\ &\geqslant \min\{f_Q(b), S(s)\} = 1.\end{aligned}$$

只有 $(f_Q \circ S)(a) = 1$. 同理可证 $(S \circ f_Q)(a) = 1$. 这意味着

$$f_Q(a) \geqslant ((f_Q \circ S) \cap (S \circ f_Q))(a) = \min\{(f_Q \circ S)(a), (S \circ f_Q)(a)\} = 1.$$

因此 $a \in Q$. 以上证得 $QS \cap SQ \subseteq Q$. 证毕. □

3.2.21 定理　设 f, g 分别为半群 S 的 Fuzzy 右理想和 Fuzzy 左理想. 则 $f \cap g$ 是 S 的 Fuzzy 拟理想.

证　$((f \cap g) \circ S) \cap (S \circ (f \cap g)) \subset (f \circ S) \cap (S \circ g) \subseteq f \cap g$. 证毕. □

3.2.22 定理　设 f, g 半群 S 的两个 Fuzzy 拟理想. $f \circ g$ 是 S 的 Fuzzy 双理想.

证　因为 f 是 S 的 Fuzzy 拟理想, 所以

$$f \circ S \circ f \subseteq S \circ S \circ f \subseteq S \circ f,\ f \circ S \circ f \subseteq f \circ S \circ S \subseteq f \circ S.$$

因此 $f \circ S \circ f \subseteq S \circ f \cap f \circ S \subseteq f$, 且

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g \subseteq f \circ g.$$

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ S \circ (f \circ g) &= (f \circ (g \circ S) \circ f) \circ g \subseteq (f \circ (S \circ S) \circ f) \circ g \\ &\subseteq (f \circ S \circ f) \circ g \subseteq f \circ g.\end{aligned}$$

这意味着 $f \circ g$ 是 Fuzzy 双理想. 证毕. □

3.2.23 定理　设 f 半群 S 的 Fuzzy 拟理想, $a \in S$. 则 $f(a^n) \geqslant f(a^{n+1}), \forall n \in N$.

证　因为 f 是 S 的 Fuzzy 拟理想, 所以任意正整数 n,

$$\begin{aligned}(f \circ S)(a^{n+1}) &= \sup_{a^{n+1}=xy} [\min\{f(x), S(y)\}] \\ &\geqslant \min\{f(a^n), S(a)\} = f(a^n).\end{aligned}$$

类似地, $(S \circ f)(a^{n+1}) \geqslant f(a^n)$. 因此 $f(a^{n+1}) \geqslant (S \circ f)(a^{n+1}) \cap (f \cap S)(a^{n+1}) = f(a^n)$. 证毕. □

3.3　Fuzzy 理想的生成

本节讨论给定半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 在 S 中生成的 Fuzzy 理想的表达. 对此, 我们先看一个引理.

3.3.1 引理　设 S 为半群, $f \in F(S)$. 则

$$(\forall x \in S)\ f(x) = \sup_{k \in [0,1]} \{k \mid x \in f_k\} (= \sup\{k \mid x \in f_k\}).$$

证　设 $\alpha = \sup\{k \mid x \in f_k\}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\sup\{k \mid x \in f_k\} > \alpha - \varepsilon$. 因此存在 $t \in \{k \mid x \in f_k\}$ 使得 $t > \alpha - \varepsilon$. 因为 $x \in f_t$, 得 $f(x) \geqslant t$, 所以 $f(x) > \alpha - \varepsilon$. 由 ε 选取的任意性得 $f(x) \geqslant \alpha$.

另一方面, 设 $t = f(x)$. 则 $x \in f_t$, 这时 $t \in \{k \mid x \in f_k\}$, 且

$$f(x) = t \leqslant \sup\{k \mid x \in f_k\} = \alpha.$$

因此由上两个方面得 $f(x)=\sup\{k \mid x\in f_k\},\forall x\in S$. 证毕. □

根据引理 3.3.1, 我们得本节主要结论.

3.3.2 定理 设 $f\in F(S)$. 则 S 的如下定义的 Fuzzy 集

$$(\forall x\in S)\ f^*(x)=\sup\{k \mid x\in (f_k)\}$$

是 f 在 S 中生成的 Fuzzy 理想 (f), 这里 (f_k) 是由 f_k 在 S 中生成的理想.

证 要证明 f^* 是 Fuzzy 理想 (f), 我们从以下几个方面来完成.

1) $f\subseteq f^*$. 事实上, 对任意的 $x\in S$, 设 $t\in\{k \mid x\in f_k\}$. 则 $x\in f_t$, 因此 $x\in (f_t)$. 这样我们有 $t\in\{k \mid x\in (f_k)\}$. 以上事实蕴涵 $\{k \mid x\in f_k\}\subseteq\{k \mid x\in (f_k)\}$. 由引理 3.3.1 得

$$(\forall x\in S)\ f(x)=\sup\{k \mid x\in f_k\}\leqslant \sup\{k \mid x\in (f_k)\}=f^*(x).$$

2) f^* 是 S 的 Fuzzy 理想. 事实上, 任取 $t\in \mathrm{Im}f^*$, 设 $\alpha_n=t-\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbf{N}$, 这里 $\mathbf{N}$ 表示正整数集. 又设 $x\in f_t^*$. 则 $f^*(x)\geqslant t$, 即

$$(\forall n\in\mathbf{N})\ \sup\{k \mid x\in (f_k)\}\geqslant t>t-\frac{1}{n}=\alpha_n.$$

因此存在 $k_n\in\{k \mid x\in (f_k)\}$ 使得 $k_n>\alpha_n$, 故 $f_{k_n}\subseteq f_{\alpha_n}$ 且 $x\in (f_{k_n})\subseteq (f_{\alpha_n})$. 以上证得 $x\in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}(f_{\alpha_n})$ 成立.

另一方面, 设 $x\in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}(f_{\alpha_n})$. 则 $(\forall n\in\mathbf{N})\ \alpha_n\in\{k \mid x\in (f_k)\}$, 因此

$$t-\frac{1}{n}=\alpha_n\leqslant \sup\{k \mid x\in (f_k)\}=f^*(x),\ n\in\mathbf{N}.$$

由 n 选取的任意性, $t\leqslant f^*(x)$ 成立. 因此 $x\in f_t^*$, 且有 $f_t^*=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(f_{\alpha_n})$. 因为 S 的理想族的交还是 S 理想, 由定理 3.2.17, f^* 是 S 的 Fuzzy 理想.

3) $f^*=(f)$. 设 g 是 S 的 Fuzzy 理想且 $f\subseteq g$. 取 $x\in S$. 如果 $f^*(x)=0$, 显然 $f^*(x)\leqslant g(x)$. 如果 $f^*(x)=t\neq 0$, 由 2), $x\in f_t^*=\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}(f_{\alpha_n})$ 成立. 因此

$$x\in (f_{\alpha_n})=f_{\alpha_n}S\cup Sf_{\alpha_n}\cup Sf_{\alpha_n}S\cup f_{\alpha_n},\ n\in\mathbf{N}.$$

我们现在考虑下列情形:

A) 假设 $x\in f_{\alpha_n}$, 显然 $g(x)\geqslant f(x)\geqslant \alpha_n$, $n\in\mathbf{N}$.

B) 假设 $x\in f_{\alpha_n}S$, 则存在 $a_1\in f_{\alpha_n}, s_1\in S$ 使得 $x=a_1s_1$, 因此

$$g(x)=g(a_1s_1)\geqslant g(a_1)\geqslant f(a_1)\geqslant \alpha_n, n\in\mathbf{N}.$$

C) 假设 $x\in Sf_{\alpha_n}$, 类似于 B), $g(x)\geqslant \alpha_n$, $n\in\mathbf{N}$ 成立.

D) 假设 $x \in Sf_{\alpha_n}S$, 则存在 $b_1 \in f_{\alpha_n}$, $s_1, s_2 \in S$ 使得 $x = s_1b_1s_2$. 因为 g 是 S 的 Fuzzy 理想, 因此

$$g(x) \geqslant g(b_1) \geqslant f(b_1) \geqslant \alpha_n,\ n \in \mathbf{N}.$$

由 n 是 $\mathbf{N}$ 的任意数得 $g(x) \geqslant t = f^*(x)$, 即 $f^* \subset g$. 由以上的 1), 2) 和 3), 证毕. □

将上定理作适当的调整, 可得

3.3.3 定理 设 $f \in F(S)$. 则 S 的如下定义的 Fuzzy 集

$$(\forall x \in S)\ f^*(x) = \sup\{k \mid x \in (f_k)_L\}$$

是 f 在 S 中生成的 Fuzzy 左理想 (f) , 这里 $(f_k)_L$ 是由 f_k 在 S 中生成的左理想. 对偶地,

$$(\forall x \in S)\ f^*(x) = \sup\{k \mid x \in (f_k)_R\}$$

是 f 在 S 中生成的 Fuzzy 右理想 (f) , 这里 $(f_k)_R$ 是由 f_k 在 S 中生成的右理想.

为了搞清楚双理想的生成问题, 我们需要下面的引理.

3.3.4 引理 半群 S 的 Fuzzy 子集 f 是 S 的 Fuzzy 双理想当且仅当对任意的 $\lambda \in (0, 1]$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 f_λ 是 S 的双理想.

证 设 f 是 S 的 Fuzzy 双理想, 且 $\lambda \in (0, 1]$. 对任意的 $x, y \in f_\lambda (f_\lambda \neq \emptyset)$, $f(x), f(y) \geqslant \lambda$, 且 $f(xy) \geqslant \min\{f(x), f(y)\} \geqslant \lambda$. 因此 $xy \in f_\lambda$, 即 f_λ 是 S 的子半群. 进一步地, 设 $\forall z \in S$, 因为 $f(xzy) \geqslant \min\{f(x), f(y)\} \geqslant \lambda$, 因此 $xzy \in f_\lambda$. 故 f_λ 是 S 的双理想.

反之, 我们用反证法. 假设 f 不是 S 的 Fuzzy 双理想, 则存在 $x_0, y_0, z_0 \in S$ 使得

$$f(x_0z_0y_0) < \min\{f(x_0), f(y_0)\}, \tag{0.1}$$

或存在 $x_0, y_0 \in S$ 使得

$$f(x_0y_0) < \min\{f(x_0), f(y_0)\}. \tag{0.2}$$

我们分开来讨论以上两种情形.

A) 如果 (0.1) 成立, 定义

$$\lambda_0 - \min\left\{\frac{1}{2}(f(x_0z_0y_0) + f(x_0)), \frac{1}{2}(f(x_0z_0y_0) + f(y_0)\right\},$$

则 $\lambda_0 \in (0, 1]$ 且 $0 \leqslant f(x_0z_0y_0) < \lambda_0 \leqslant 1$, $f(x_0) > \lambda_o > 0$, $f(y_0) > \lambda_0 > 0$, 因此 $x_0, y_0 \in f_{\lambda_0}$. 因为 f_{λ_0} 是 S 的双理想, 所以 $x_0z_0y_0 \in f_{\lambda_0}$. 故 $f(x_0z_0y_0) \geqslant \lambda_0$. 矛盾.

B) 如果 (0.2) 成立, 定义

$$\lambda_0 = \min\left\{\frac{1}{2}(f(x_0y_0) + f(x_0)), \frac{1}{2}(f(x_0y_0) + f(y_0)\right\},$$

则 $\lambda_0 \in (0,1]$ 且 $0 \leqslant f(x_0y_0) < \lambda_0 \leqslant 1$, $f(x_0) > \lambda_0 > 0$, $f(y_0) > \lambda_0 > 0$, 因此 $x_0, y_0 \in f_{\lambda_0}$. 因为 f_{λ_0} 是 S 的子半群，所以 $x_0y_0 \in f_{\lambda_0}$. 故 $f(x_0y_0) \geqslant \lambda_0$. 矛盾．综上 1) 和 2), f 是 S 的 Fuzzy 双理想．证毕． □

由引理 3.3.1 以及定理 3.3.2, 我们仅需将定理的陈述和证明过程作适当的调整，可得

3.3.5 定理 设 $f \in F(S)$. 则 S 的如下定义的 Fuzzy 集

$$(\forall x \in S)\ f^*(x) = \sup\{k \mid x \in (f_k)_B\}$$

是 f 在 S 中生成的 Fuzzy 双理想 (f) , 这里 $(f_k)_B$ 是由 f_k 在 S 中生成的双理想.

3.3.6 推论 设 $f = x_\lambda \in F(S)(\lambda \neq 0)$. 则 S 的 Fuzzy 子集 f 在 S 中生成的 Fuzzy 理想 (f) 是

$$(\forall y \in S)\ \ (f)(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{如果 } y \in (x), \\ 0, & \text{如果 } y \notin (x), \end{cases}$$

这里 (x) 是 x 在 S 中生成的主理想.

证 由定理 3.3.2, $(f)(y) = \sup\{k \mid x \in (f_k)\}, \forall y \in S$. 现分以下两种情形来讨论:

A) 如果 $y \in (x)$, 则 $y \in (f_k), 0 < k \leqslant \lambda$. 事实上，设 $0 < k \leqslant \lambda$. 则 $f_k = \{z \mid f(z) = x_\lambda(z) \geqslant k\} = \{x\}$, 因此 $y \in (x) = (f_k)$. 如果 $k > \lambda$, 显然 $f_k = \emptyset$. 因此

$$(f)(y) = \sup\{k \mid k \in (f_k)\} = \sup\{k \mid 0 < k \leqslant \lambda\} = \lambda.$$

B) 如果 $y \notin (x)$, 则 $(f)(y) = 0$. 事实上，如果 $(f)(y) \neq 0$, 则存在 $t \in (0,1]$ 使得 $y \in (f_t)$. 因为 $f_t \neq \emptyset$, 由 A), $t \leqslant \lambda$, 因此 $f_t = \{x\}$. 故 $y \in (f_t) = (x)$. 矛盾．证毕． □

类似于推论 3.3.6, 我们有

3.3.7 推论 设 $f = x_\lambda \in F(S)(\lambda \neq 0)$. 则 S 的 Fuzzy 子集 f 在 S 中生成的 Fuzzy 左 (右，双) 理想是

$$(\forall y \in S)\ (f)_L(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{如果 } y \in (x)_L, \\ 0, & \text{如果 } y \notin (x)_L. \end{cases}$$

$$(f)_R(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{如果 } y \in (x)_R, \\ 0, & \text{如果 } y \notin (x)_R. \end{cases}$$

$$(f)_B(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{如果 } y \in (x)_B, \\ 0, & \text{如果 } y \notin (x)_B. \end{cases}$$

证　证明类似于推论 3.3.6, 略去. □

我们可以通过直接计算得出由一个 Fuzzy 点生成的 Fuzzy 理想.

3.3.8 定理　设 f　$a_\lambda \in F(S)(\lambda \neq 0)$. 则以下各款成立:

(1) $(\forall x \in S)\ \ (S \circ a_\lambda \circ S)(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in SaS; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$

(2) 对任意的含于 S 的 Fuzzy 点 a_λ 和 b_μ, $a_\lambda \circ b_\mu = (ab)_{\lambda \wedge \mu}$.

(3) $(a_\lambda) = a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S$.

(4) $(a_\lambda)^3 \subseteq S \circ a_\lambda \circ S$.

(5) 对任意的 $\lambda, \mu > 0$, $b_\mu \in S \circ a_\lambda \circ S$ 当且仅当 $b \in SaS$, $\mu \leqslant \lambda$.

(6) 对任意的 $\lambda, \mu > 0$, $b_\mu \circ a_\lambda = a_\lambda \circ b_\mu$ 当且仅当 $ba = ab$.

证　我们仅证明 (4) 和 (5), 其他款的证明读者可作为练习.

(4). 根据 (2),

$$(a_\lambda)^3 = (a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S)^2 \circ (a_\lambda).$$

因为

$$\begin{aligned}(a_\lambda)^2 &= (a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ &\quad \circ (a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ &\subseteq S \circ (a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ &\subseteq S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(a_\lambda)^3 &\subseteq (S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \circ (a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ &\subseteq (S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S) \circ S \\ &\subseteq S \circ a_\lambda \circ S.\end{aligned}$$

(5). 根据 (1), 如果 $b_\mu \in S \circ a_\lambda \circ S$, 则 $(S \circ a_\lambda \circ S)(b) \geqslant b_\mu(b) = \mu > 0$, 因此 $b \in SaS$ 且 $(S \circ a_\lambda \circ S)(b) = \lambda \geqslant \mu$. 反包含是显然的. 证毕. □

3.3.9 练习　设 f, g 是 S 的 Fuzzy 子集, $x_r \in f$, $y_s \in g$. 则以下各款成立:

1) 设 f, g 是 S 的 Fuzzy 右理想. 则

$$(x_r) \circ (y_s) \subset f \circ g \cup S \circ f \circ g.$$

2) 设 f, g 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则

$$(x_r) \circ (y_s) \subseteq f \circ g \cup f \circ g \circ S.$$

设 $f = x_\lambda(\lambda \neq 0)$. 以下 S 的 Fuzzy 理想 (x_λ) 称为 S 的 Fuzzy *主理想*. 我们知道 S 的每个理想是它的主理想的并, 相似地, 半群 S 的 Fuzzy 理想也有类似的结论.

3.3.10 定理 设 S 为半群. 则 S 的每个 Fuzzy 理想是 S 的一些 Fuzzy 主理想的并.

证 设 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 $f = \bigcup\limits_{x\in \mathrm{supp}f} (x_{f(x)})$. 事实上, 由推论 3.3.6, 对任意 $y \in S$, 如果 $f(y) \neq 0$, 则

$$\Big(\bigcup_{x\in \mathrm{supp}f} (x_{f(x)})\Big)(y) = \bigcup_{y\in(z), z\in \mathrm{supp}f} (z_{f(z)})(y) = \bigcup_{y\in(z), z\in \mathrm{supp}f} f(z).$$

如果 $z \neq y$, 则存在 a_1, a_2, b_1 和 $b_2 \in S$ 使得 $y = za_1$, 或 $y = a_2z$, 或 $y = b_1zb_2$. 对于任何一种情形, 因为 f 为 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $f(y) \geqslant f(z)$. 因此,

$$\bigcup_{x\in \mathrm{supp}f} (x_{f(x)})(y) = \bigcup_{y\in(z), z\in \mathrm{supp}f} f(z) = f(y).$$

如果 $f(y) = 0$, 则对任意 $z \in \mathrm{supp}f$, $y \notin (z)$. 否则, 如果 $y \in (z)$, 则 $f(y) \geqslant f(z)$, 因此 $f(y) \neq 0$. 矛盾. 以上证明了

$$f(y) = \bigcup_{x\in \mathrm{supp}f} (x_{f(x)})(y) = 0.$$

证毕. □

下面我们来讨论幺半群上的 Fuzzy 理想生成问题.

3.3.11 定理 设 $f \in F(S^1)$. 则 S^1 中由 f 生成的 Fuzzy 理想 (f) 为

$$(\forall a \in S)\ (f)(a) = \sup_{a=x_1x_2x_3} f(x_2),$$

这里 $x_1, x_2, x_3 \in S^1$.

证 设 $a = x_1x_2x_3(x_1, x_2, x_3 \in S^1)$ 且 $k = f(x_2)$. 则 $x_2 \in f_k$, 这样 $a = x_1x_2x_3 \in (f_k)$. 因此 $f(x_2) \in \{k \mid a \in (f_k)\}$. 由定理 3.3.2,

$$(f)(a) = \sup\{k \mid a \in (f_k)\} \geqslant \sup_{a=x_1x_2x_3, x_1,x_2,x_3\in S^1} f(x_2).$$

另一方面, 设 $t \in \{k \mid a \in (f_k)\}$. 则 $a \in (f_t)$ 且存在 $x_1, x_3 \in S^1, x_2 \in f_t$ 使得 $a = x_1x_2x_3$. 因为 $x_2 \in f_t$, 所以 $f(x_2) \geqslant t$. 故

$$\sup\{k \mid a \in (f_k)\} \leqslant \sup_{a=x_1x_2x_3, x_1,x_2,x_3\in S^1} f(x_2).$$

证毕. □

类似于定理 3.3.11, 我们可以得出幺半群 S^1 上 Fuzzy 集 f 生成的 Fuzzy 左 (右) 理想分别为

$$(\forall a \in S)\ (f)_L(a) = \sup_{a=x_1x_2, x_1, x_2 \in S^1} f(x_2), \quad (f)_R(a) = \sup_{a=x_1x_2, x_1, x_2 \in S^1} f(x_1).$$

3.3.12 定理　设 $f \in F(S^1)$ 且 S^1 是正则的. 则 S^1 的 Fuzzy 子集 f 生成的 Fuzzy 双理想 $(f)_B$ 为

$$(f)_B(a) = \sup_{a=x_1x_2x_3, x_1, x_2, x_3 \in S^1} \min\{f(x_1), f(x_3)\},$$

这里 $a \in S$ 且 $x_1, x_2, x_3 \in S^1$.

证　设 $a = x_1x_2x_3, x_1, x_2, x_3 \in S^1$ 且设 $k = \min\{f(x_1), f(x_3)\}$. 则 $x_1, x_3 \in f_k$. 因此 $a = x_1x_2x_3 \in (f_k)_B$, $\min\{f(x_1), f(x_3)\} \in \{k \mid a \in (f_k)_B\}$. 由定理 3.3.5,

$$(f_k)_B(a) = \sup\{k \mid a \in (f_k)_B\} \geqslant \sup_{a=x_1x_2x_3, x_1, x_2, x_3 \in S^1} \min\{f(x_1), f(x_3)\}.$$

反之, 设 $t \in \{k \mid a \in (f_k)_B\}$. 则

$$a \in (f_t)_B = f_t \cup f_t^2 \cup f_tS^1f_t = f_t \cup f_tS^1f_t.$$

因为 S^1 是正则的, 所以 $f_t \subseteq f_tS^1f_t$. 因此 $a \in (f_t)_B = f_tS^1f_t$, 且存在 $x_1, x_3 \in f_t$, $x_2 \in S^1$ 使得 $a = x_1x_2x_3$. 因为 $x_1, x_3 \in f_t$, 所以 $f(x_1), f(x_3) \geqslant t$, 以上推出 $\min\{f(x_1), f(x_3)\} \geqslant t$. 因此

$$(f_k)_B(a) = \sup\{k \mid a \in (f_k)_B\} \leqslant \sup_{a=x_1x_2x_3, x_1, x_2, x_3 \in S^1} \min\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

证毕. □

3.4　正规 Fuzzy 理想

本节引入了半群的正规左 (右) 模糊理想的概念, 讨论这类模糊理想的性质. 本节总设 S 是一个具有 0 元的半群.

设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想, 那么 $\mu(0) \geqslant \mu(x), \forall x \in S$. 我们有

$$S_\mu = \{x \in S \mid \mu(x) = \mu(0)\}$$

是 S 的左 (右) 理想, 因为 $S_\mu = \mu_{\mu(0)}$. 不过, 一般情况下, $\mu(0)$ 不一定等于 1. 所以我们有以下的定义:

3.4.1 定义　S 的模糊左 (右) 理想 μ 称为 正规 的，如果 $\mu(0)=1$.

不难看出，设 I 为 S 的左理想，那么 f_I 为 S 的模糊正规左理想且 $S_{f_I}=I$.

3.4.2 定理　设 μ 和 ν 为 S 的模糊左 (右) 理想，那么 $S_\mu \cap S_\nu \subseteq S_{\mu\cap\nu}$.

证　设 $x\in S_\mu\cap S_\nu$, 那么

$$(\mu\cap\nu)(x)=\mu(x)\cap\nu(x)=\mu(0)\cap\nu(0)=(\mu\cap\nu)(0).$$

因此，$x\in S_{\mu\cap\nu}$. 故 $S_\mu\cap S_\nu\subseteq S_{\mu\cap\nu}$. 证毕.　□

一般情况下，我们没有 $S_{\mu\cap\nu}\subseteq S_\mu\cap S_\nu$. 我们有下面反例说明.

3.4.3 例　设 S 为半群，取 $\mu=0$.

$$\nu(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

那么 μ,ν 均为 S 的模糊理想，且 $S_\mu=S$, $S_\nu=\{0\}$. 那么我们有 $S_\mu\cap S_\nu=\{0\}$, 但是 $S_{\mu\cap\nu}=S_\mu=S$.

进一步地，我们有下面的定理：

3.4.4 定理　设 μ,ν 为 S 的正规模糊左 (右) 理想，那么 $S_\mu\cap S_\nu=S_{\mu\cap\nu}$.

证　由定理 3.4.1, 我们只要证明 $S_{\mu\cap\nu}\subseteq S_\mu\cap S_\nu$. 事实上，$\forall x\in S_{\mu\cap\nu}$,

$$(\nu\cap\mu)(x)=(\mu\cap\nu)(0)=\mu(0)\cap\nu(0)=1.$$

因此，$\mu(x)=\nu(x)=1=\mu(0)=\nu(0)$, 即 $x\in S_\mu\cap S_\nu$. 证毕.　□

通过数学归纳法，我们不难证明

3.4.5 推论　设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 S 的正规模糊左 (右) 理想簇，那么

$$\bigcap_{i\in I} S_{\mu_i}=S_{\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i}.$$

3.4.6 定理　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，我们定义 μ^+ 如下：

$$(\forall x\in S)\ \ \mu^+(x)=\mu(x)+1-\mu(0).$$

那么 μ^+ 为 S 的正规模糊左 (右) 理想且包含 μ.

证　设 $\forall x,y\in S$, 那么

$$\begin{aligned}\mu^+(xy)&=\mu(xy)+1-\mu(0)\\&\geqslant \mu(x)\wedge\mu(y)+1-\mu(0)\\&=(\mu(x)+1-\mu(0))\wedge(\mu(y)+1-\mu(0))\\&=\mu^+(x)\wedge\mu^+(y).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\mu^+(xy) &= \mu(xy)+1-\mu(0)\\ &\geqslant \mu(y)+1-\mu(0)\ \ (\mu(x)+1-\mu(0))\\ &= \mu^+(y)\ \ (\mu^+(x)),\end{aligned}$$

所以，μ^+ 为 S 的模糊左 (右) 理想，且 $\mu^+(0)=\mu(0)+1\quad\mu(0)=1$.

$$\mu(x)\leqslant\mu^+(x)+1-\mu(0)=\mu^+(x)\ \ ,$$

即 $\mu\leqslant\mu^+$. 证毕. □

由定理 3.4.1 我们有

3.4.7 推论　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，如果对 $x\in S,\mu^+(x)=0$, 那么 $\mu(x)=0$.

3.4.8 定理　设 μ,ν 为 S 的模糊左 (右) 理想，如果 $\mu\leqslant\nu$ 且 $\mu(0)=\nu(0)$, 那么 $S_\mu\subseteq S_\nu$.

证　$\forall x\in S_\mu$, 则 $\mu(x)=\mu(0)=\nu(0)$. 又 $\mu(x)\leqslant\nu(x)\leqslant\nu(0)$, 因此 $\nu(x)=\nu(0)=\mu(x)$, 故 $x\in S_\nu$. 证毕. □

3.4.9 推论　设 μ,ν 为 S 的正规模糊左 (右) 理想，且 $\mu\leqslant\nu$, 则 $S_\mu\subseteq S_\nu$.

3.4.10 定理　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，μ 为正规的当且仅当 $\mu^+=\mu$.

证　充分性是显然的. 反之，设 μ 为正规的，那么 $\mu(0)=1$. 由 μ^+ 的定义,

$$(\forall x\in S)\ \ \mu^+(x)=\mu(x)+1-\mu(0)=\mu(x),$$

因此 $\mu^+=\mu$. 证毕. □

3.4.11 推论　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，那么 $(\mu^+)^+=\mu^+$.

3.4.12 推论　设 μ 为 S 的正规模糊左 (右) 理想，那么 $(\mu^+)^+=\mu$

3.4.13 定理　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，如果存在一个模糊左 (右) 理想 ν 使得 $\nu^+\leqslant\mu$, 则 μ 为正规的.

证　因为 $\nu^+\leqslant\mu$, 所以 $\nu^+(0)=1\leqslant\mu(0)$, 因此，$\mu(0)=1$. 证毕. □

3.4.14 推论　设 μ 为非正规的模糊左 (右) 理想，则 μ 不包含任何正规模糊左 (右) 理想.

3.4.15 注　我们容易看出，设 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为 S 的正规模糊左 (右) 理想簇，那么 $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i$ 及 $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i$ 均为 S 的正规模糊左 (右) 理想. 设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想，包含 μ 的最小的正规模糊左 (右) 理想，我们记为 μ^*, 一般情况下，$\mu^*\neq\mu^+$. 事实上 μ^* 为

$$(\forall x\in S)\ \ \mu^*(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \mu(x), & x\neq 0.\end{cases}$$

3.4.16 定理　设 μ 为 S 的模糊左 (右) 理想, $L=[0,1]$ 又设 f 为 L 到 L 上的单调增函数. 我们定义 S 的模糊子集 μ_f

$$\mu_f(x)=f(\mu(x))\ \ \forall x\in S.$$

那么 μ_f 也为 S 的模糊左 (右) 理想.

证　$\forall x,y\in S$,

$$\begin{aligned}\mu_f(xy)=f(\mu(xy))&\geqslant f(\mu(x)\wedge\mu(y))\\&=f(\mu(x))\wedge f(\mu(y))\\&=\mu_f(x)\wedge\mu_f(y),\\\mu_f(xy)=f(\mu(xy))&\geqslant f(\mu(y))\ \ (f(\mu(x)))\\&=\mu_f(y)\ \ (\mu_f(x)).\end{aligned}$$

□

3.4.17 注　在定理 3.4.10 中, 如果 $f(\mu(0))=1$, 那么 μ_f 为正规模糊左 (右) 理想. 特别地, 如果 $f(x)\geqslant x,\forall x\in L$. 那么 $\mu\leqslant\mu_f$.

3.4.18 定理　设 μ 不为常值函数且为 S 的极大正规模糊左 (右) 理想 (关于正规模糊左 (右) 理想集的包含关系), 那么 $\mathrm{Im}\mu=\{0,1\}$.

证　注意到 $\mu(0)=1$. 设存在 $a\in S$ 使得 $\mu(a)\neq 1$, 我们可以证明 $\mu(a)=0$. 事实上, 如果 $0<\mu(a)<1$, 我们定义一个模糊子集 ν

$$(\forall x\in S)\ \ \nu(x)=\frac{1}{2}(\mu(x)+\mu(a)).$$

那么

$$\begin{aligned}\nu(xy)&=\frac{1}{2}(\mu(xy)+\mu(a))\\&\geqslant\frac{1}{2}(\mu(x)\wedge\mu(y)+\mu(a))\\&=(\frac{1}{2}(\mu(x)+\mu(a))\wedge(\frac{1}{2}(\mu(y)+\mu(a))\\&=\nu(x)\wedge\nu(y).\\\nu(xy)&=\frac{1}{2}(\mu(xy)+\mu(a))\\&\geqslant\frac{1}{2}(\mu(y)+\mu(a))\ \ (\frac{1}{2}(\mu(x)+\mu(a))\\&=\nu(y)\ \ (\nu(x)).\end{aligned}$$

所以 ν 为 S 的模糊左 (右) 理想, 且

$$\nu^+(x)=\mu(x)+1-\mu(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\mu(x)+\mu(a)) + 1 - \frac{1}{2}(\mu(0)+\mu(a)) \\
&= \frac{1}{2}(\mu(x)+1).
\end{aligned}
$$

显然 $\nu^+(0) = 1 > \nu^+(a) = \frac{1}{2}(\mu(a)+1)$, 所以 ν^+ 为 S 的非常值函数且为 S 的正规模糊左 (右) 理想. 因为

$$
\nu^+(a) = \frac{1}{2}(\mu(a)+1) > \mu(a),
$$

所以 μ 不为 S 的极大正规模糊左 (右) 理想, 矛盾. 证毕. □

第4章　Fuzzy 素理想及其扩张

本章讨论半群的 Fuzzy 理论中 Fuzzy 素理想、 Fuzzy 完全理想、 Fuzzy 弱素理想、 Fuzzy 拟素理想和 Fuzzy 弱拟素理想等的性质及其相互关系.

4.1　Fuzzy 素理想

4.1.1 定义　半群 S 的一个 Fuzzy 理想 f 称为 Fuzzy *素理想*, 如果对 S 的任两个 Fuzzy 理想 g, h, $g \circ h \subseteq f$ 蕴涵 $g \subseteq f$ 或 $h \subseteq f$. S 的一个 Fuzzy 理想 f 称为是 Fuzzy *不可约的*, 如果有 S 的两个 Fuzzy 理想 g, h 使得 $f = g \cap h$, 则 $f = g$ 或 $f = h$.

我们容易知道任何非真的 Fuzzy 子集 f (f 是常数) 是 S 的 Fuzzy 素理想. 设 f 是 S 的 Fuzzy 子集, 显然 $f = \bigcup\limits_{a_\lambda \in f} a_\lambda$. 设 A 是 S 非空子集, $\lambda \in (0, 1]$. 定义 λf_A 为 S 的 Fuzzy 子集:

$$\lambda f_A(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in A; \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$\lambda f_{\{a\}}$ 事实上就是 S 的 Fuzzy 点 a_λ.

下面的引理不难证明, 可作为练习.

4.1.2 引理　设 A 是 S 的非空子集. 则对任意 $\lambda \in (0, 1]$, 下列各款成立:

(1) $\lambda f_A \circ \lambda f_A = \lambda f_{AB}$;

(2) $\lambda f_A \cap \lambda f_A = \lambda f_{A \cap B}$;

(3) $\lambda f_A = \bigcup\limits_{a \in A} a_\lambda$;

(4) $S \circ \lambda f_A = \lambda f_{SA}$;

(5) 如果 A 是 S 的理想 (左理想, 右理想), 则 λf_A 是 S 的 Fuzzy 理想 (Fuzzy 左理想, Fuzzy 右理想)

本节以下用 P 表示 S 的非常值函数的 Fuzzy 素理想.

4.1.3 定理　假设 I 是半群 S 的理想, 则 I 是 S 的素理想当且仅当 f_I 是 S 的 Fuzzy 素理想.

证　设 I 是 S 的理想. 则 f_I 是 S 的 Fuzzy 理想. 设 f 和 g 是 S 的 Fuzzy 理想且 $f \circ g \subseteq f_I$. 如果 $f \not\subseteq f_I$, 则存在 Fuzzy 点 $x_\lambda \in f (\lambda > 0)$ 使得 $x_\lambda \notin f_I$. 对任意

的 $y_\mu \in g(\mu \neq 0)$, 因为 $(x_\lambda) \circ (y_\mu) \subseteq f \circ g \subseteq f_I$ 且

$$(\forall z \in S)\ (x_\lambda) \circ (y_\mu)(z) = \begin{cases} \lambda \wedge \mu > 0, & z \in (x)(y); \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

所以 $(x)(y) \subseteq I$. 根据假设得出 $(x) \subseteq I$ 或 $(y) \subset I$. 又因为 $x_\lambda \notin f_I$, 所以 $x \notin I$, $(x) \not\subseteq I$. 因此 $(y) \subseteq I$, 这意味着 $y_\mu \in f_I$. 故 $g = \bigcup_{y_\mu \in g} y_\mu \subseteq f_I$.

反之, 设 A 和 B 是 S 的理想且 $AB \subseteq I$. 则 f_A, f_B 是 S 的 Fuzzy 理想, 且 $f_A \circ f_B = f_{AB} \subseteq f_I$. 由假设, $f_A \subseteq f_I$ 或 $f_B \subseteq f_I$. 因此 $A \subseteq I$ 或 $B \subseteq I$. 证毕. □

4.1.4 定理　设 S 为半群, P 是 S 的 Fuzzy 素理想. 则 $|\mathrm{Im}(P)| = 2$.

证　因为 P 是 S 的非常值 Fuzzy 素理想, 所以 $|\mathrm{Im}(P)| \geqslant 2$. 假设 $|\mathrm{Im}(P)| \geqslant 3$. 则存在 x, y 和 $z \in S$ 使得 $P(x), P(y)$ 和 $P(z)$ 互不相同. 不失一般性, 我们假设 $P(x) < P(y) < P(z)$. 设 $r, t \in (0,1)$ 使得 $P(x) < r < P(y) < t < P(z)$. 则

$$(\forall u \in S)\ (x_r) \circ (y_t)(u) = \begin{cases} r \wedge t = r, & u \in (x)(y); \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

如果 $u \in (x)(y)$, 则存在 s_1, s_2, s_3 和 $s_4 \in S^1$ 使得 $u = s_1 x s_2 s_3 y s_4$. 因此,

$$P(u) \geqslant P(s_1 x s_2 s_3 y s_4) \geqslant \max\{P(x), P(y)\} = P(y) > r.$$

这样 $(x_r) \circ (y_t) \subseteq P$ 成立, 由此推出 $(x_r) \subseteq P$ 或 $(y_t) \subseteq P$, 譬如说 $(x_r) \subseteq P$, 则 $P(x) \geqslant (x_r)(x) = r$, 矛盾. □

4.1.5 定理　设 S 为半群. 如果 P 是 S 的 Fuzzy 素理想, 则存在 $x_0 \in S$ 使得 $P(x_0) = 1$.

证　由定理 4.1.4, $|\mathrm{Im}(P)| = 2$. 如果对任意 $x \in S, P(x) < 1$, 则 $\mathrm{Im}(P) = \{t, s\}, t < s < 1$. 因此存在 $x, y \in S$ 和 $m \in (0,1]$ 使得 $P(x) = t < s = P(y) < m \leqslant 1$. 设 $t_1, t_2 \in (0,1)$ 使得 $t < t_1 < s < t_2 < m$. 类似于定理 4.1.4 的证明, 我们有 $(x_{t_1}) \circ (y_{t_2}) \subseteq P$. 因为 P 是 S 的 Fuzzy 素理想, 所以 $(x_{t_1}) \subseteq P$ 或 $(y_{t_2}) \subseteq P$, 即 $P(x) \geqslant t_1$ 或 $P(y) \geqslant t_2$. 矛盾. 证毕. □

4.1.6 定理　设 S 为半群. 如果 P 是 S 的 Fuzzy 素理想, 则 P 的每个非空的水平截集 $P_t (t \in (0,1])$ 是 S 的素理想.

证　对任意 $t \in (0,1]$, P_t 是 S 的理想. 假设 I 和 J 是 S 的理想使得 $IJ \subset P_t$, 且设 $A = tf_I$ 和 $B = tf_J$. 则由引理 4.1.2, A 和 B 是 S 的 Fuzzy 理想. 进一步地, $A \circ B \subseteq P$. 事实上, 对任意的 $x \in S$, 如果 $A \circ B(x) = 0$, 则结论显然. 如果 $A \circ B(x) \neq 0$, 则存在 $y_0, z_0 \in S$ 使得 $x = y_0 z_0$ 和 $A(y_0) \wedge B(z_0) \neq 0$. 因此 $y_0 \in I$, $z_0 \in J$, 这样 $x \in IJ \subseteq P_t$, 即 $P(x) \geqslant t$. 故 $A \circ B(x) = \bigvee_{x = yz} (A(y) \wedge B(z)) \leqslant t \leqslant P(x)$,

即 $A\circ B\subseteq P$. 因为 P 是 S 的 Fuzzy 素理想，所以 $A\subseteq P$ 或 $B\subseteq P$, 譬如说 $A\subseteq P$, 则对任意 $x\in I, A(x)=t\leqslant P(x)$. 因此 $I\subseteq P_t$. 证毕. □

根据定理 4.1.5 和定理 4.1.6, 可得出

4.1.7 推论　设 S 为半群. 如果 P 是 S 的 Fuzzy 素理想，则 P_1 是 S 的素理想.

4.1.8 注　定理 4.1.6 的逆一般是不成立的. 例如，设 I 是 S 的素理想，且设

$$P(x)=\begin{cases} t, & x\in I;\\ 0, & x\notin I,\end{cases}$$

这里 $0<t<1$. 则 P 是 S 的 Fuzzy 理想. 对任意 $t\in(0,1]$, 如果 $P_t\neq\emptyset$, 则 $P_t=I$, 它是 S 的素理想. 但是 P 不是 S 的 Fuzzy 素理想，因为 $P_1=\emptyset$.

下面我们给出 S 的 Fuzzy 素理想的刻画.

4.1.9 定理　设 S 为半群，P 是 S 的 Fuzzy 子集. 则 P 是 S 的 Fuzzy 素理想当且仅当 P 满足下列条件:

(1) $|\mathrm{Im}(P)|=2$;

(2) $P_1\neq\emptyset$, 且 P_1 是 S 的素理想.

证　设 P 是 S 的 Fuzzy 素理想. 根据以上定理 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6 和推论 4.1.7, (1) 和 (2) 成立.

反之，假设 $\mathrm{Im}(P)=\{t,1\}$ $(t<1)$. 则

(1) P 是 S 的 Fuzzy 理想. 事实上,

a) 如果 $x,y\in P_1$, 则 $P(xy)=1=P(x)=P(y)$;

b) 如果 $x,y\notin P_1$, 则 $P(x)=P(y)=t$, 因此 $P(xy)\geqslant\max\{P(x),P(y)\}$;

c) 如果 $x\notin P_1, y\in P_1$, 则 $xy\in P_1$ 和 $P(xy)=1=\max\{P(x),P(y)\}$;

d) 如果 $x\in P_1, y\notin P_1$, 则类似于 γ), 仍然有 $P(xy)=1=\max\{P(x)),P(y)\}$.

(2) P 是 Fuzzy 素的. 事实上, 设 f 和 g 是 S 的 Fuzzy 理想使得 $f\circ g\subseteq P$. 如果 $f\nsubseteq P$ 且 $g\nsubseteq P$, 则存在 $x,y\in S$ 使得 $f(x)>P(x)$ 且 $g(y)>P(y)$. 因此 $x,y\notin P_1$, 由此推出 $xSy\nsubseteq P_1$. 否则，$(SxS)(SyS)\subseteq P_1$, 根据条件 (2) 得出 $SxS\subseteq P_1$ 或 $SyS\subseteq P_1$, 譬如说 $SxS\subseteq P_1$, 则 $(x)^3\subseteq P_1$, 因此 $x\in(x)\in P_1$, 矛盾.

因为 $xSy\nsubseteq P_1$, 所以存在 $s\in S$ 使得 $xsy\notin P_1$. 设 $a=xsy$. 则 $P(a)=P(x)=P(y)=t$. 因此 $f\circ g(a)\geqslant f(x)\wedge g(sy)\geqslant f(x)\wedge g(y)>t=P(a)$. 这和事实 $f\circ g\subseteq P$ 矛盾. 证毕. □

4.1.10 定理　设 P 是 S 的 Fuzzy 素理想. 则存在 S 的真的 Fuzzy 素理想 Q 使得 $P\subset Q$.

证　设 P 是 S 的 Fuzzy 素理想. 根据定理 4.1.5, 存在元素 $x_0\in S$ 使得 $P(x_0)=1$, 且 $\mathrm{Im}P=\{a,1\}$, 这里 $a<1$.

设 Q 是 S 的 Fuzzy 子集，定义如下：

$$(\forall x \in S)\ \ Q(x) = \frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2}.$$

容易看出 Q 是 S 的 Fuzzy 理想，且 $|\mathrm{Im}(Q)| = 2$.

另一方面，因为 $Q_1 = P_1$, Q_1 是 S 的素理想. 由定理 4.1.9, Q 是 S 的 Fuzzy 素理想. 因为 $1 > Q(x) = \frac{1}{2}(P(x)+1) > P(x)$, 所以 $P \subset Q$. 证毕. □

下面的定理是我们期望的.

4.1.11 定理　设 S 为半群，f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则下列各款等价：

(1) f 是 S 的 Fuzzy 素理想；

(2) 对任意 $x_r, y_s \in S$, 如果 $x_r \circ S \circ y_s \subseteq f$, 则 $x_r \in f$, 或 $y_s \in f$;

(3) 对任意 $x_r, y_s \in S$, 如果 $(x_r) \circ (y_s) \subseteq f$, 则 $x_r \in f$, 或 $y_s \in f$;

(4) 如果 g 和 h 是 S 的 Fuzzy 右理想使得 $g \circ h \subseteq f$, 则 $g \subseteq f$, 或 $h \subseteq f$;

(5) 如果 g 和 h 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g \circ h \subseteq f$, 则 $g \subseteq f$, 或 $h \subseteq f$;

(6) 如果 g 是 S 的 Fuzzy 右理想，h 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g \circ h \subseteq f$, 则 $g \subseteq f$ 或 $h \subseteq f$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 对任意 $x_r, y_s \in S$, 如果 $x_r \circ S \circ y_s \subseteq f$, 则 $(S \circ x_r \circ S) \circ (S \circ y_s \circ S) \subseteq S \circ (x_r \circ S \circ y_s) \circ S \subseteq f$. 因为 $S \circ x_r \circ S$ 和 $S \circ y_s \circ S$ 是 S 的 Fuzzy 素理想，所以 $S \circ x_r \circ S \subseteq f$ 或 $S \circ y_s \circ S \subseteq f$. 譬如说 $S \circ x_r \circ S \in f$, 则 $(x_r)^3 \subseteq S \circ x_r \circ S \subseteq f$. 因为 f 是 Fuzzy 素的，所以 e $x_r \in (x_r) \subseteq f$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 设 $(x_r) \circ (y_s) \subseteq f$. 根据定理 3.3.8, 我们有

$$\begin{aligned} x_r \circ S \circ y_s &\subseteq x_r \circ (y_s \cup y_s \circ S \cup S \circ y_s \cup S \circ y_s \circ S) \\ &\subseteq (x_r) \circ (y_s) \subseteq f. \end{aligned}$$

由 (2), $x_r \in f$ 或 $y_s \in f$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 设 g 和 h 是 S 的 Fuzzy 右理想使得 $g \circ h \subseteq f$. 如果 $g \not\subseteq f$, 则存在 $x \in S$ 使得 $g(x) \not\leqslant f(x)$, 因此 $x_{g(x)} \notin f$. 对任意 $y_s \in h$, $(x_{g(x)}) \circ (y_s) \subseteq g \circ h \cup S \circ g \circ h \subseteq f \cup S \circ f \subseteq f$. 根据假设 $y_s \in f$, 因此 $h = \bigcup_{y_s \in h} y_s \in f$.

类似于 (3) $\Rightarrow$ (4), 我们可以证明 (3) $\Rightarrow$ (5). 另 (5) $\Rightarrow$ (1), $\Rightarrow$.(1) 和 (6) $\Rightarrow$ (1) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (6). 设 g 是 S 的 Fuzzy 右理想且 h 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g \circ h \subseteq f$. 如果 $g \not\subseteq f$, 则存在一个 Fuzzy 点 $x_r \in h$ 使得 $x_r \notin f$. 对任意 $y_s \in h$,

$$\begin{aligned} (x_r) \circ (y_s) &= (x_r \cup S \circ x_r \cup x_r \circ S \cup S \circ x_r \circ S) \circ (y_s) \\ &\subseteq (g \cup S \circ g) \circ (y_s \cup y_s \circ S \cup S \circ y_s \cup S \circ y_s \circ S) \end{aligned}$$

$$\subseteq (g \cup S \circ g) \circ (h \cup h \circ S)$$

$$\subseteq g \circ h \cup g \circ h \circ S \cup S \circ g \circ h \cup S \circ g \circ h \circ S.$$

因为 $g \circ h \subseteq f$, 所以 $(x_r) \circ (y_s) \subseteq f$, 因此由假设 $y_s \in f$, 故 $h = \bigcup_{y_s \in h} y_s \in f$. 证毕. □

4.1.12 练习　设 S 是半群. 如果 f 是 S 的 Fuzzy 素理想, 证明 $f(xy) = f(yx)$, $\forall x, y \in S$, 且对任意 $x, y, z, t \in S$, 下列 (1) 和 (2) 成立:

(1) $f(x) = f(y), f(z) = f(t) \Rightarrow f(xz) = f(yt)$;

(2) $f(x) \leqslant f(y), f(z) \leqslant f(t) \Rightarrow f(xz) \leqslant f(yt)$.

4.2　Fuzzy 弱素理想

本节我们讨论 Fuzzy 弱素理想、 Fuzzy 完全素理想和 Fuzzy 弱完全素理想及其相互关系.

4.2.1 定义　S 的一个 Fuzzy 理想 P 称为 S 的 Fuzzy *弱素理想*, 如果对 S 的任意的 A 和 B, $\lambda \in (0,1]$, $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P \Rightarrow \lambda f_A \subseteq P$ or $\lambda f_B \subseteq P$.

4.2.2 定理　设 S 为半群, P 为 S 的 Fuzzy 理想. 则 P 为 S 的 Fuzzy 弱素理想当且仅当 $P_t (t > 0)$ 是 S 的素理想, 只要 $P_t \neq \emptyset$

证　设 A 和 B 是 S 的理想. 对任意 $t \in (0,1]$, 如果 $AB \subseteq P_t$, 则 $tf_{AB} \subseteq P$, 即 $tf_A \circ tf_B = tf_{AB} \subseteq P$. 因为 P 是 S 的 Fuzzy 弱素理想, 所以 $tf_A \subseteq P$ 或 $tf_B \subseteq P$. 譬如说 $tf_A \subseteq P$, 则 $A \subseteq P_t$.

反之, 设 A, B 为 S 的理想, 使得 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P$ $(\lambda > 0)$, 即 $\lambda f_{AB} \subseteq P$. 则 $AB \subseteq P_\lambda$. 因为 P_λ 是 S 的素理想, 所以 $A \subseteq P_\lambda$ 或 $B \subseteq P_\lambda$, 譬如 $A \subseteq P_\lambda$, 则 $\lambda f_A \subseteq P$. 证毕. □

4.2.3 定理　设 S 为半群, P 为 S 的 Fuzzy 理想. 则下列各款等价:

(1) P 为 S 的 Fuzzy 弱素理想;

(2) 对任意 $x_r, y_r \in S$ $(r > 0)$, 如果 $x_r \circ S \circ y_r \subseteq P$, 则 $x_r \in P$ 或 $y_r \in P$;

(3) 对任意 $x_r, y_r \in S(r > 0)$, 如果 $(x_r) \circ (y_r) \subseteq P$, 则 $x_r \in P$ 或 $y_r \in P$;

(4) 如果 A ,B 是 S 的右理想使得 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P$, 则 $\lambda f_A \subseteq P$ 或 $\lambda f_B \subseteq P$;

(5) 如果 A,B 是 S 的左理想使得 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subset P$, 则 $\lambda f_A \subseteq P$ 或 $\lambda f_B \subseteq P$;

(6) 如果 A 是 S 的右理想, B 是 S 的左理想使得 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P$, 则 $\lambda f_A \subseteq P$ 或 $\lambda f_B \subseteq P$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 P 是 S 的 Fuzzy 弱素理想. 对任意 $x_r, y_r \in S(r > 0)$, 如

果 $x_r \circ S \circ y_r \subseteq P$, 则

$$\begin{aligned} rf_{SxS} \circ rf_{SyS} &= (S \circ x_r \circ S) \circ (S \circ y_r \circ S) \\ &\subseteq S \circ (x_r \circ S \circ y_r) \circ S \subseteq S \circ P \circ S \subseteq P. \end{aligned}$$

因此 $S \circ x_r \circ S \subseteq P$ 或 $S \circ y_r \circ S \subseteq P$. 譬如 $S \circ x_r \circ S \subseteq P$, 则 $(x_r)^3 \subset S \circ x_r \circ S \subseteq P$. 因为 P 是 Fuzzy 弱素的, $(x_r) = rf_{(x)} \subseteq P$. 因此 $x_r \in (x_r) \subset P$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 如果对任意 $x_r, y_r \in S(r > 0), (x_r) \circ (y_r) \subseteq P$. 则 $x_r \circ S \circ y_r \subseteq (x_r) \circ (y_r) \subseteq P$. 因此 $x_r \in P$ 或 $y_r \in P$.

(3)$\Longrightarrow$ (4). 设 A、B 都是 S 的右理想. 则 λf_A 和 λf_B 是的 Fuzzy 右理想. 如果 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P(\forall \lambda > 0)$, 且 $\lambda f_A \not\subseteq P$, 则存在 $x \in A$, 使得 $x_\lambda \notin P$. 对任意 $y \in B$, 根据假设

$$\begin{aligned} (x_\lambda) \circ (y_\lambda) &= \lambda f_{(x)} \circ \lambda f_{(y)} \\ &= \lambda f_{(x)(y)} \subseteq \lambda f_{AB \cup SAB} \\ &= \lambda f_{AB} \cup \lambda f_{SAB} \\ &= (\lambda f_A \circ \lambda f_B) \cup (S \circ \lambda f_A \circ \lambda f_B) \subseteq P. \end{aligned}$$

因为 $x_\lambda \notin P$, $(x_\lambda) \not\subseteq P$, 所以 $(y_\lambda) \subset P$. 因此 $\lambda f_B = \bigcup_{y \in B} (y_\lambda) \subseteq P$.

(4) $\Rightarrow$ (1), (5) $\Rightarrow$ (1) 和 (6) $\Rightarrow$ (1) 是显然的, (3) $\Rightarrow$ (5) 类似于 (3) $\Rightarrow$ (4) 的证明.

(3) $\Longrightarrow$ (6). 设 A 是 S 的右理想且 B 是 S 的左理想. 如果 $\lambda f_A \circ \lambda f_B \subseteq P(\lambda > 0)$ 且 $\lambda f_A \not\subseteq P$, 则存在 $x \in A$ 使得 $x_\lambda \notin P$. 对任意 $y \in B$, 因为

$$\begin{aligned} (x_\lambda) \circ (y_\lambda) &= \lambda f_{(x)(y)} \subseteq \lambda f_{(A \cup SA)(B \cup BS)} \\ &= \lambda f_{AB \cup SAB \cup ABS \cup SABS} \\ &= (\lambda f_A \circ \lambda f_B) \cup S \circ (\lambda f_A \circ \lambda f_B) \\ &\quad \cup (\lambda f_A \circ \lambda f_B) \circ S \cup S \circ (\lambda f_A \circ \lambda f_B) \circ S \subseteq P, \end{aligned}$$

且 $(x_\lambda) \not\subseteq P$, 所以 $(y_\lambda) \subset P$. 故 $\lambda f_B = \bigcup_{y \in B} (y_\lambda) \subset P$. 相似地, 我们能证明如果 $\lambda f_B \not\subseteq P$, 则 $\lambda f_A \subseteq P$ 成立. 证毕. □

4.2.4 定义　S 的一个 Fuzzy 理想 P 称为 Fuzzy *完全素理想*, 如果对任意两个 Fuzzy 点 $x_\lambda, y_\mu \in S(\forall \lambda, \mu \in (0,1])$, $x_\lambda \circ y_\mu \in P$ 推出 $x_\lambda \in P$ 或 $y_\mu \in P$.

4.2.5 定义　S 的一个 Fuzzy 理想 P 称为 Fuzzy *弱完全素理想*, 如果对任意两个 Fuzzy 点 $x_\lambda, y_\lambda \in S(\forall \lambda \in (0,1])$, $x_\lambda \circ y_\lambda \in P$ 推出 $x_\lambda \in P$ 或 $y_\lambda \in P$.

4.2.6 定理　设 S 为半群，P 为 S 的 Fuzzy 子集．P 是 Fuzzy 完全素理想当且仅当对 S 的任意的 Fuzzy 子集 f 和 g，$f\circ g\subseteq P\Rightarrow f\subseteq P$ 或 $g\subseteq P$.

证　假设 f 和 g 是 S 的 Fuzzy 子集且 $f\circ g\subseteq P$．如果 $f\not\subseteq P$, 则存在 $x_\lambda\in f$ 使得 $x_\lambda\notin P$．因为 $f\circ g=\bigcup\limits_{x_\lambda\in f,y_\mu\in g}x_\lambda\circ y_\mu$, 所以对任意 $y_\mu\in g$, 我们有 $x_\lambda\circ y_\mu\in f\circ g\subseteq P$. 因此 $y_\mu\in P$. 故 $g=\bigcup\limits_{y_\mu\in B}y_\mu\Rightarrow g\subseteq P$.

反之显然．证毕．□

4.2.7 定理　设 S 为半群．S 的 Fuzzy 理想 P 是 Fuzzy 弱完全素的当且仅当 $(\forall x,y\in S)\ \ P(xy)=\max\{P(x),P(y)\}$.

证　因为 P 是 S 的 Fuzzy 理想，所以 $(\forall x,y\in S)\ P(xy)\geqslant\max\{P(x),P(y)\}$. 另一方面，如果 $P(xy)>\max\{P(x),P(y)\}$, 则存在 $t\in(0,1]$ 使得 $P(xy)>t>\max\{P(x),P(y)\}$. 对任意的 $x,y\in S$, $x_t\circ y_t=(xy)_t\in P$, 但 $x_t\notin P$ 且 $y_t\notin P$. 矛盾．因此 $(\forall x,y\in S)\ \ P(xy)=\max\{P(x),P(y)\}$.

反之，假设任意两个 Fuzzy 点 $x_\lambda,y_\lambda\in S(\forall\lambda\in(0,1])$, $x_\lambda\circ y_\lambda=(xy)_\lambda\in P$. 如果 x_λ,y_λ 均不在 P 中，则 $\lambda>P(x)\lambda>P(y)\Rightarrow\lambda>\max\{P(x),P(y)\}=P(xy)$. 又因为 $(xy)_\lambda\in P$, 所以 $\lambda\leqslant P(xy)$. 矛盾．因此 $x_\lambda\in P$ 或 $y_\lambda\in P$. 证毕．□

4.2.8 定理　设 S 为半群．S 的 Fuzzy 理想 P 是 Fuzzy 弱完全素的当且仅当如果 $P_t\neq\emptyset$, $P_t(0<t\leqslant 1)$ 是 S 的完全素理想．

证　设 $x,y\in S$ 使得 $xy\in P_t$. 则 $P(xy)=\max\{P(x),P(y)\}\geqslant t$, 即 $P(x)\geqslant t$ 或 $P(y)\geqslant t$. 因此 $x\in P_t$ 或 $y\in P_t$.

反之，设 $P(xy)=t$, $x,y\in S$. 则 $xy\in P_t$. 因为 P_t 是 S 的完全素理想，所以 $x\in P_t$ 或 $y\in P_t$, 即 $P(x)\geqslant t$ 或 $P(y)\geqslant t$. 因此 $P(xy)\leqslant\max\{P(x),P(y)\}$. 由假设和定理 4.2.7, $P(xy)=\max\{P(x),P(y)\}$. 故 P 是 Fuzzy 弱完全素的．□

根据定理 4.2.7, 4.2.8 和定义 4.2.2, 我们有

4.2.9 定理　设 S 为半群，P 是 S 的 Fuzzy 理想．则下列各款成立：

(1) 如果 P 是 S 的 Fuzzy 完全素理想，则 P 是 S 的 Fuzzy 素理想和 Fuzzy 弱完全素理想；

(2) 如果 P 是 S 的 Fuzzy 素理想，则 P 是 S 的 Fuzzy 弱素理想；

(3) 如果 P 是 S 的弱完全素理想，则 P 是 S 的 Fuzzy 弱素理想．

根据定理 4.2.8 和定理 4.1.3, 我们有下列结论．

4.2.10 定理　设 S 为半群，I 是 S 的素理想．则 f_I 是 S 的 Fuzzy 弱素理想．

4.2.11 定理　设 S 为交换半群, P 为 S 的 Fuzzy 理想．则

(1) P 是 S 的 Fuzzy 完全素理想当且仅当 P 是 S 的 Fuzzy 素理想；

(2) P 是 S 的 Fuzzy 弱完全素理想当且仅当 P 是 S 的 Fuzzy 弱素理想．

证　(1) 设 P 是 S 的 Fuzzy 素理想且 a_λ、$b_\mu \in S$. 如果 $a_\lambda \circ b_\mu \in P$, 因为 S 是可换的，所以

$$\begin{aligned}(a_\lambda)\circ(b_\mu) &= (a_\lambda \cup S\circ a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S\circ a_\lambda \circ S)\\ &\quad \circ(b_\mu \cup S\circ b_\mu \cup b_\mu \circ S \cup S\circ b_\mu \circ S)\\ &\subseteq (a_\lambda \cup S\circ a_\lambda)\circ(b_\mu \cup S\circ b_\mu)\\ &\subseteq a_\lambda \circ b_\mu \cup S\circ a_\lambda \circ b_\mu \subseteq P.\end{aligned}$$

由此推出 $a_\lambda \in (a_\lambda)\subseteq P$ 或 $b_\mu \in (b_\mu)\subseteq P$. 故 P 是 S 的 Fuzzy 完全素理想.

根据定理 4.2.9, (1) 的逆是显然的， (2) 的证明完全类似于 (1). 证毕.　□

4.2.12 注　尽管 S 的 Fuzzy 弱素理想和 Fuzzy 弱完全素理想能被它们的水平截集来刻画，但是 S 的 Fuzzy 素理想和 Fuzzy 完全素理想并没有类似的结果. 因此一般情况下定理 (2) 和 (3) 的逆并不成立.

4.3　Fuzzy 半素性

半群 S 的一个非空子集 A 称为 *半素* 的，如果 $a\in S, a^2\in A \Rightarrow a\in A$. S 的一个 Fuzzy 子集 f 称为 *Fuzzy 完全半素* 的，如果 $f(a)\geqslant f(a^2), \forall a\in S$. 下面的结论说明 Fuzzy 完全半素性是半素性的扩张.

4.3.1 定理　设 A 为半群 S 的非空子集. 则下列各款等价：

(1) A 是半素的；

(2) A 的特征函数 f_A 是 Fuzzy 完全半素的.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $a\in S$. 如果 $a^2\in A$, 则由假设 $a\in A$, 因此 $f_A(a)=f_A(a^2)=1$. 如果 $a^2\notin A$, 则 $f_A(a)\geqslant 0 = f_A(a^2)$. 因此对任意的元素 $a\in S$, $f(a)\geqslant f(a^2)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 $a\in S, a^2\in A$. 如果 $a\notin A$, 则 $f_A(a)=0$. 由假设 $f(a)\geqslant f(a^2)$. 因此 $f(a^2)=0$, 只有 $a^2\notin A$. 矛盾. 因此 $a\in A$.　□

我们可以容易得到以下的推论.

4.3.2 推论　设 f 为半群 S 的 Fuzzy 子半群. 则下列各款等价：

(1) f 是 Fuzzy 完全半素的；

(2) $(\forall a\in S)\ f(a)=f(a^2)$.

我们可以给出完全半素子半群的 Fuzzy 点刻画.

4.3.3 定理　设 f 为半群 S 的非空 Fuzzy 子集. f 是 Fuzzy 完全半素的当且仅当 $(a^2)_\lambda \in f, a\in S, \lambda\in(0,1] \Rightarrow a_\lambda \in f$.

证　设 f 为半群 S 的非空 Fuzzy 子集且 f 是 Fuzzy 完全半素的. 设 $a\in S$, 则 $f(a)\geqslant f(a^2)$. 如果 $(a^2)_\lambda\in f, a\in S, \lambda\in(0,1]$, 则 $f(a^2)\geqslant\lambda$. 因此 $f(a)\geqslant\lambda$, 即 $a_\lambda\in f$.

反之，由假设 $a\in S$, $f(a)<f(a^2)$. 则 $(a^2)_{f(a^2)}\in f$, 因此 $(a)_{f(a^2)}\in f\Rightarrow f(a^2)\leqslant f(a)$. 矛盾. 证毕. □

4.3.4 定理　设 f 为半群 S 的非空 Fuzzy 子集. f 是 Fuzzy 完全半素的当且仅当对任意的 Fuzzy 子集 g, $g^2\subseteq f\Rightarrow g\subseteq f$.

证　类似于定理 4.2.6 的证明，略. □

4.3.5 定理　设 S 为半群. S 的一个 Fuzzy 理想 f 是 Fuzzy 完全素理想当且仅当 f 是 Fuzzy 完全半素理想且是 Fuzzy 素的.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 完全素理想，当然 f 是 Fuzzy 素的和 Fuzzy 完全半素的.

反之，假设 f 是 Fuzzy 完全半素和 Fuzzy 素的，设 $a_\lambda\circ b_\mu\in f$. 则

$$\begin{aligned}(b_\mu\circ S\circ a_\lambda)^2&=(b_\mu\circ S\circ a_\lambda)\circ(b_\mu\circ S\circ a_\lambda)\\&=b_\mu\circ S\circ a_\lambda\circ b_\mu\circ S\circ a_\lambda\\&\subseteq S\circ a_\lambda\circ b_\mu\circ S\subseteq S\circ f\circ S\subseteq f.\end{aligned}$$

因为 f 是 Fuzzy 完全半素的，则根据定理 4.3.4, $b_\mu\circ S\circ a_\lambda\subseteq f$. 因此 $(S\circ b_\mu\circ S)\circ(S\circ a_\lambda\circ S)\subseteq S\circ(b_\mu\circ S\circ a_\lambda)\circ S\subseteq f$. 因为 $S\circ a_\lambda\circ S$ 和 $S\circ b_\mu\circ S$ 是 S 的 Fuzzy 理想，所以 $S\circ a_\lambda\circ S\subseteq f$ 或 $S\circ b_\mu\circ S\subseteq f$. 譬如 $S\circ a_\lambda\circ S\subseteq f$. 根据定理 3.3.8(3), $(a_\lambda)^3\subseteq S\circ a_\lambda\circ S\subseteq f$. 因此 $(a_\lambda)^2\subseteq f$ 或 $(a_\lambda)\subseteq f$.

如果 $(a_\lambda)\subseteq f$, 则 $a_\lambda\in(a_\lambda)\subseteq f$. 如果 $(a_\lambda)^2\subseteq f$, 因为 f 是 Fuzzy 素的，则 $(a_\lambda)\subseteq f$. 因此 $a_\lambda\in f$. 证毕. □

一个半群 S 称为是*阿基米德* (*Archimedean*) 的，如果 $(\forall a,b\in S)$ $(\exists n\in N)$ $a^n\in SbS$.

4.3.6 定理　设半群 S 是阿基米德的. 则 S 的每个 Fuzzy 完全半素理想是常数.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 完全半素理想，$a,b\in S$. 因为 S 是阿基米德的，存在 $n\in N$, $x,y\in S$ 使得 $a^n=xby$. 因此 $f(a)=f(a^n)=f(xby)\geqslant f(b)$. 类似地，我们可以证明 $f(b)\geqslant f(a)$. 因此 $f(a)=f(b)$. 证毕. □

4.3.7 推论　设半群 S 是阿基米德的. 则 S 不包含真的半素理想.

下面我们讨论半群的 Fuzzy 半素理想.

4.3.8 定义　半群 S 的一个非常数的 Fuzzy 子集是 *Fuzzy 半素* 的，如果对 S 的任意 Fuzzy 理想 g, $g^2\subseteq f\Rightarrow g\subseteq f$.

4.3.9 定理　S 的一个 Fuzzy 理想 f 是 Fuzzy 半素的当且仅当 $f(a)=\inf f(aSa)$, $\forall a\in S$.

证　假设 $f(a)=\inf f(aSa)$, $\forall a\in S$, 如果对 S 的任意 Fuzzy 理想 g, $g^2\subseteq f$, 但是 $g\not\subseteq f$. 则存在 $a\in S$ 使得 $f(a)<g(a)$. 因为 $f(a)=\inf f(aSa)$, 所以存在 $t\in S$ 使

得 $f(ata) < g(a)$. 由 $g^2 \subseteq f, g(a) > g(ata) \geqslant g \circ g(ata) = \sup_{xy=ata}\min\{g(x), g(y)\} \geqslant \min\{g(at), g(a)\} = g(a)$. 矛盾.

反之，假设 $f(a) \neq \inf f(aSa), \forall a \in S$. 因为 f 是 Fuzzy 理想，所以 $f(a) < \inf f(aSa)$. 设 $\inf f(aSa) = m$. 定义 S 的一个新的 Fuzzy 子集 $h : h(x) = m, x \in SaS$, $h(x) = 0, x \notin SaS$. 则 h 是 S 的 Fuzzy 理想. 下面证明 $h^2 \subseteq f$. 事实上，假设 $h \circ h(x) = n$, 则 $n = \sup_{yz=x}\min\{h(y), h(z)\}$. 这意味着存在 $u, v \in SaS$ 使得 $uv = x$. 设 $u = sat, v = paq$. 则 $f(x) = f(uv) = f(satpaq) \geqslant f(atpa) \geqslant \inf f(aSa) = n = h^2(x)$. 因此 $h^2 \subseteq f$. 由假设 $h \subseteq f$. 进一步地，我们定义 S 的另一个新的 Fuzzy 子集 $g : h(x) = m, x \in S^1aS^1, h(x) = 0, x \notin S^1aS^1$，则 g 是 S 的 Fuzzy 理想. 下面证明 $g^4 \subseteq f$. 事实上，假设 $x \in S^1aS^1$, 则 $g^4(x) = m = \sup_{x_1x_2x_3x_4}\min\{g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)\}$. 由 g 的定义只有 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S^1aS^1$. 设 $x_1 = s_0at_0, x_2 = s_1at_1, x_3 = s_2at_2, x_4 = s_3at_3, s_i, t_i \in S(i = 0, 1, 2, 3)$. 因此 $x = s_0at_0s_1at_1s_2at_2s_3at_3 \in SaS$, 故 $h(x) = m$. 从而 $g^4 \subseteq h \subseteq f$. 由假设 $g \subseteq f$, 但是 $m = g(a) \leqslant f(a)$ 和 $f(a) < m$ 矛盾. 证毕. □

4.3.10 推论　假设 S 半群，f 是 S 的 Fuzzy 理想. 如果 f 是 Fuzzy 完全半素的，则 f 是 Fuzzy 半素的.

证　对任意 $a \in S$, $f(a) = f(a^2) = f(a^4)$. 因为 $a^4 \in SaS$, 所以 $\inf f(aSa) \leqslant f(a^4) = f(a)$. 又 f 是 S 的 Fuzzy 理想，所以 $f(aSa) \geqslant f(a)$. 故 $f(aSa) = f(a)$. 证毕. □

4.3.11 练习　*假设 S 是可换半群，f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 f 是 Fuzzy 完全半素的当且仅当 f 是 Fuzzy 半素的.*

4.3.12 练习　(1) *假设 S 是半群，f 是 S 的 Fuzzy 理想. 如果 f 是 Fuzzy 完全半素的，则 $\max\{f(a), f(b)\} = \inf f(aSa), \forall a, b \in S$.*

(2) *假设 S 是可换半群，则 f 是 Fuzzy 完全半素的当且仅当 $\max\{f(a), f(b)\} = \inf f(aSa), \forall a, b \in S$.*

4.3.13 定理　假设 S 是半群. 如果 f 是 S 的 Fuzzy 素理想，则 $\max\{f(a), f(b)\} = \inf f(aSa), \forall a, b \in S$.

证　假设存在 $a, b \in S$ 使得 $\max\{f(a), f(b)\} \neq \inf f(aSa)$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 素理想，所以 $\max\{f(a), f(b)\} < \inf f(aSa)$. 设 $\inf f(aSa) = m$. 定义 S 的两个新的 Fuzzy 子集 $g, h : g(x)(h(x)) = m, x \in SaS(SbS)$, $g(x)(h(x)) = 0, x \notin SaS(SbS)$, 则 g, h 是 S 的 Fuzzy 理想. 进一步地，$g \circ h \subseteq f$. 事实上，$g \circ h(x) \in \{m, 0\}, \forall x \in S$, 且 $g \circ h(x) = m$ 当且仅当存在 $y, z \in SaS$ 使得 $x = yz$. 所以 $g \circ h(x) = m$ 当且仅当 $x \in (SaS)^2$ 当且仅当存在 $s, t, p, q \in S$ 使得 $x = satpaq$. 因此，$f(x) = f(satpaq) \geqslant f(atpa) \geqslant \inf f(aSa) = m$.

因为 f 是 Fuzzy 素理想，所以 $g \circ h \subseteq f \Rightarrow g \subseteq f$, 或 $h \subseteq f$. 譬如说 $g \subseteq f$, 定义 S 的新的 Fuzzy 子集 $\delta : \delta(x) = m, x \in S^1aS^1$, $\delta(x) = 0, x \notin S^1aS^1$. 类似于定理

4.3.9 的证明, $\delta^4 \subseteq g \subseteq f \Rightarrow \delta \subseteq f \Rightarrow m - \delta(x) \leqslant f(x)$. 这和 $\max\{f(a), f(b)\} < m$ 矛盾. 证毕. □

4.3.14 定理 设 S 为半群, P 是 S 的 Fuzzy 子集. 则 P 是 S 的 Fuzzy 素理想当且仅当 P 满足下列条件:

(1) $|\mathrm{Im}(P)| = 2$;

(2) $\max\{P(a), P(b)\} = \inf P(aSa), \forall a, b \in S$.

证 根据定理 4.1.9 和定理 4.3.13, 必要性显然. 反之, 假设 (1) 和 (2) 成立. 设 $\mathrm{Im}(P) = \{s, t\}(s < t)$. 如果 f, g 是 S 的两个 Fuzzy 理想, $f \circ g \subseteq P$, 但是 $f \not\subseteq P, g \not\subseteq P$. 则一定存在 $x, y \in S$ 使得 $f(x) > P(x), g(x) > P(x)$. 这时只有 $f(x) = g(x) = t, P(x) = P(y) = s$. 从 (2) 我们得出存在 u 使得 $P(xuy) = s \geqslant f \circ g(xuy) \geqslant \min\{f(xy), g(y)\} \geqslant \min\{f(x), g(y)\} = t$. 这和 $s < t$ 矛盾. 证毕. □

本节的最后我们给出两个例子说明上面定理中的条件 (1) 和 (2) 是缺一不可的.

4.3.15 例 假设 $S = \mathbf{Z}$. S 关于通常的乘法是半群. f 是 S 的 Fuzzy 子集定义如下: 如果 $x = 0, f(x) = 1$; 如果 x 是偶数, $f(x) = \frac{1}{2}$; 如果 x 是奇数, $f(x) = 0$, 则 f 是 Fuzzy 完全弱素理想. 因此上定理中的 (2) 成立. 但是 f 不是 Fuzzy 素理想, 即使 S 的可换的.

4.3.16 例 S 同上例, $B = 6\mathbf{Z}$. 则 f_B 不是 S 的 Fuzzy 素理想. 我们可看出定理 4.3.14 中 (2) 不成立. 事实上, $0 = \sup\{f_B(2), f_B(3)\} \neq \min f_B(2S3) = 1$.

4.4 Fuzzy 拟素和弱拟素左理想

本节我们研究半群的 Fuzzy 素、Fuzzy 拟 - 素和 Fuzzy 弱拟 - 素左理想, 介绍 Fuzzy m- 系的概念以及研究它和 Fuzzy 拟 - 素之间的关系, 刻画了包含在 Fuzzy 左理想内的最大的 Fuzzy 理想和包含 Fuzzy 左理想的最大的 Fuzzy 子半群.

设 L 是 S 的左理想. L 称为 S 的 *素左理想*, 如果对 S 的两个理想 A, B, 若 $AB \subseteq L$, 则 $A \subseteq L$ 或 $B \subseteq L$. L 称为 S 的 *拟素左理想*, 如果对 S 的两个左理想 L_1, L_2 使得 $L_1L_2 \subseteq L$, 则 $L_1 \subseteq L$ 或 $L_2 \subseteq L$. L 称为 S 的 *弱拟素左理想*, 如果对 S 的任两个左 L_1, L_2 使得 $L \subset L_1, L_2$ 且 $L_1L_2 \subseteq L$, 则 $L_1 = L$ 或 $L_2 = L$.

4.4.1 定义 S 的一个 Fuzzy 左理想 f 称为 S 的 Fuzzy *素左理想*, 如果对 S 的两个 Fuzzy 理想 f_1, f_2, 若 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 则 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

4.4.2 定理 S 的一个 Fuzzy 左理想 f 是 Fuzzy 素的当且仅当对 S 的任意两个 Fuzzy 点 $x_r, y_t \in S(rt > 0)$, 如果 $x_r \circ S \circ y_t \circ S \subseteq f$, 则 $x_r \in f$ 或 $y_t \in f$.

证 设 x_r 和 y_t 是 S 的 Fuzzy 点使得 $x_r \circ S \circ y_t \circ S \subseteq f$. 则 $(S \circ x_r \circ S) \circ (S \circ y_t \circ S) \subseteq f$. 因为 f 是 Fuzzy 素的且 $S \circ x_r \circ S$、$S \circ y_t \circ S$ 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $S \circ x_r \circ S \subseteq f$

或 $S \circ y_t \circ S \subseteq f$. 譬如 $S \circ x_r \circ S \subseteq f$, 则 $(x_r)^3 \subseteq S \circ x_r \circ S \subseteq f$. 因此 $x_r \in (x_r) \subseteq f$.

反之，设 f_1, f_2 是 S 的 Fuzzy 理想使得 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$. 如果 $f_1 \not\subseteq f, f_2 \not\subseteq f$, 则存在 $x, y \in S$ 使得 $f_1(x) > f(x)$, $f_2(y) > f(y)$. 设 $r = f_1(x), t = f_2(y)$. 则 $rt > 0$, $x_r \in f_1$, $y_t \in f_2$ 且 $x_r \circ S \circ y_t \circ S \subseteq (x_r) \circ (y_t) \subseteq f_1 \circ f_2 \subseteq f$. 根据假设， $x_r \in f$ 或 $y_t \in f$. 譬如 $x_r \in f$, 则 $f(x) \geqslant r = f_1(x)$. 矛盾. 证毕. □

4.4.3 定理 S 的一个左理想 L 是素的当且仅当 f_L 是 Fuzzy 素左理想.

证 设 L 是 S 的素左理想，则 f_L 是 S 的 Fuzzy 左理想. 对 S 的任意两个 Fuzzy 理想 f_1 和 f_2, 如果 $f_1 \circ f_2 \subseteq f_L$, 则 $f_1 \subseteq f_L$, 或 $f_2 \subseteq f_L$. 事实上，如果 $f_1 \not\subseteq f_L$, $f_2 \not\subseteq f_L$. 则存在 $x, y \in S$ 使得 $f_1(x) > f_L(x)$, $f_2(y) > f_L(y)$. 因此 $f_1(x) > 0, f_2(y) > 0$, 且 $f_L(x) = f_L(y) = 0$. 这意味着 $x, y \notin L$.

我们现在证明存在 $r_1, r_2 \in S$ 使得 $xr_1yr_2 \notin L$. 事实上，如果 $xSyS \subseteq L$, 则 $(SxS)(SyS) \subseteq L$. 因为 SxS 和 SyS 是 S 的理想且 L 是 S 的素左理想，所以 $SxS \subseteq L$ 或 $SyS \subseteq L$. 譬如 $SxS \subseteq L$, 则 $(x)^3 \subseteq SxS \subseteq L$. 因此 $x \in (x) \subseteq L$. 矛盾. 设 $a = xr_1yr_2$. 则 $f_L(a) = 0$, 且

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2(a) &= \sup_{a=cd}(f_1(c) \wedge f_2(d)) \geqslant f_1(xr_1) \wedge f_2(yr_2) \\ &\geqslant f_1(x) \wedge f_2(y) > 0, \end{aligned}$$

这和事实 $f_1 \circ f_2 \subseteq f_L$ 矛盾. 因此 f_L 是 S 的 Fuzzy 素左理想.

反之，设 f_L 是 S 的 Fuzzy 素左理想且 A, B 是 S 的理想使得 $AB \subseteq L$. 则 $f_A \circ f_B \subseteq f_L$. 事实上，对任意 $x \in S$, 我们考虑两种情形：

1) 如果 $f_A \circ f_B(x) = 0$, 显然 $f_L(x) \geqslant f_A \circ f_B(x)$;

2) 如果 $f_A \circ f_B(x) \neq 0$, 则存在 $a, b \in S$ 使得 $x = ab$ 且 $f_A(a) \wedge f_B(b) \neq 0$. 因此 $a \in A$ 且 $b \in B$, 即 $x \in AB \subseteq L$. 因此 $f_L(x) = 1 \geqslant f_A \circ f_B(x)$. 由假设 f_L 是 Fuzzy 素的，因此 $f_A \subseteq f_L$ 或 $f_B \subseteq f_L$, 即 $A \subseteq L$ 或 $B \subseteq L$. 证毕. □

4.4.4 定义 S 的 Fuzzy 左理想 f 称为 Fuzzy *拟 - 素左理想*, 如果对 S 的任两个 Fuzzy 左理想 f_1 和 f_2 , 如果 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 则 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$. f 称为 Fuzzy *拟 - 半素左理想*, 如果对 S 的任意 Fuzzy 左理想 g, 如果 $g^2 \subseteq f$, 则 $g \subseteq f$.

类似于定理 4.4.2 和定理 4.4.3, 我们可以刻画 S 的 Fuzzy 拟素左理想. 证明仅是上述两定理证明的模仿，略去.

4.4.5 定理 S 的一个 Fuzzy 左理想 f 是 Fuzzy 拟素的当且仅当对 S 的任意两个 Fuzzy 点 $x_r, y_t \in S(rt > 0)$, 如果 $x_r \circ S \circ y_t \subseteq f$, 则 $x_r \in f$ 或 $y_t \in f$.

4.4.6 定理 S 的一个左理想 L 是拟素的当且仅当 f_L 是 Fuzzy 拟素左理想.

4.4.7 定义 S 的一个 Fuzzy 子集称为 Fuzzy *m-系*, 如果对任意 $t, s \in [0, 1)$ 且 $a, b \in S$, 如果 $f(a) > t, f(b) > s$, 则存在 $x \in S$ 使得 $f(axb) > t \vee s$.

4.4.8 定理 设 M 是 S 的非空子集. 则 M 是 S 的 m- 系当且仅当 f_M 上 S 的 Fuzzy m- 系.

证 对任意 $t, s \in [0,1)$ 且 $a, b \in S$, 如果 $f_M(a) > t$, $f_M(b) > s$, 则 $a, b \in M$. 由假设存在元素 $x \in S$ 使得 $axb \in M$, 即 $f_M(axb) = 1$. 因此 $f_M(axb) > t \vee s$.

反之, 设 $a, b \in M$. 则 $f_M(a) = f_M(b) = 1$. 因此对任意 $t, s \in [0,1)$, $f_M(a) > t, f_M(b) > s$, 这意味着存在 $x \in S$ 使得 $f_M(axb) > s \vee t$. 故 $axb \in M$. 证毕. □

4.4.9 定理 设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 f 是 Fuzzy 拟 - 素的当且仅当 $1 - f$ 是 Fuzzy m- 系.

证 对任意 $t, s \in [0,1)$, $a, b \in S$, 如果 $(1-f)(a) > t, (1-f)(b) > s$, 则 $f(a) < 1 - t$, $f(b) < 1 - s \Rightarrow a_{1-t} \notin f$, $b_{1-s} \notin f$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 拟 - 素左理想, 根据定理 4.4.6, 存在 $x \in S$ 使得 $a_{1-t} \circ f_{\{x\}} \circ b_{1-s} = (axb)_{(1-t)\wedge(1-s)} \notin f$. 因此 $f(axb) < (1-t) \wedge (1-s) = 1 - (t \vee s)$. 故 $(1-f)(axb) > t \vee s$.

反之, 设 $a_t, b_s (ts > 0) \in S$ 使得 $a_t \circ S \circ b_s \subseteq f$. 如果 $a_t \notin f$ 且 $b_s \notin f$, 则 $f(a) < t, f(b) < s$. 因此 $(1-f)(a) > 1 - t$ 且 $(1-f)(b) > 1 - s$. 由假设存在 $x \in S$ 使得 $(1-f)(axb) > (1-t) \vee (1-s) = 1 - t \wedge s$, 即 $f(axb) < t \wedge s$. 根据定理 3.3.8 $a_t \circ f_{\{x\}} \circ b_s = (axb)_{t\wedge s} \notin f$. 矛盾. 证毕. □

4.4.10 定义 S 的一个 Fuzzy 左理想 f 称为*弱拟素*的, 如果对任意两个 Fuzzy 左理想 f_1 和 f_2, 使得 $f \subseteq f_1, f \subseteq f_2$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 则 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

4.4.11 定理 一个左理想 L 是弱拟素的当且仅当 f_L 是 Fuzzy 弱拟素的.

证 设 L 是 S 的弱拟素左理想, f_1 和 f_2 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $f_L \subseteq f_1$, $f_L \subseteq f_2$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq f_L$. 如果 $f_1 \not\subseteq f_L$, $f_2 \not\subseteq f_L$, 则存在 $x, y \in S$ 使得 $f_1(x) > f_L(x)$, $f_2(y) > f_L(y)$, 因此 $x, y \notin L$ 且 $f_1(x) > 0$, $f_2(y) > 0$. 进一步地, 存在 $r_1, r_2 \in S$ 使得 $(\{r_1x\} \cup L)(\{r_2y\} \cup L) \not\subseteq L$. 事实上, 如果 $(Sx \cup L)(Sy \cup L) \subseteq L$, 因为 $Sx \cup L$ 和 $Sy \cup L$ 是 S 的包含 L 的左理想, 由假设 $Sx \cup L = L$ 或 $Sy \cup L = L$. 譬如 $Sx \cup L = L$, 则 $Sx \subseteq L$. 因此

$$
\begin{aligned}
(L \cup L(x))(L \cup L(x)) &\subseteq L^2 \cup LL(x) \cup L(x)L \cup L(x)L(x) \\
&\subseteq L \cup Sx = L.
\end{aligned}
$$

故 $x \in L \cup L(x) = L$. 矛盾.

因为 $(\{r_1x\} \cup L)(\{r_2y\} \cup L) \not\subseteq L$, 所以 $r_1xr_2y \notin L$ 或 $Lr_2y \not\subseteq L$.

1) 如果 $r_1xr_2y \notin L$, 那么

$$
\begin{aligned}
f_1 \circ f_2(r_1xr_2y) &\geqslant f_1(r_1x) \wedge f_2(r_2y) \\
&\geqslant f_1(x) \wedge f_2(y) > 0.
\end{aligned}
$$

但是 $f_L(r_1xr_2y) = 0$. 矛盾.

2) 如果 $Lr_2y \not\subseteq L$, 则存在元素 $l \in L$ 使得 $lr_2y \notin L$, 即 $f_L(lr_2y) = 0$. 但是

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2(lr_2y) &\geqslant f_1(l) \wedge f_2(r_2y) \\ &\geqslant f_L(l) \wedge f_2(y) = f_2(y) > 0. \end{aligned}$$

矛盾. 所以 $f_1 \subseteq f_L$ 或 $f_2 \subseteq f_L$.

反之, 如果 f_L 是 S 的 Fuzzy 弱拟素左理想, 则 L 是弱拟素的. 证明类似于定理 4.4.3 的 "反之". 证毕. □

4.4.12 定理　设 S 是可换的, f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则下列各款等价:

(1) f 是 Fuzzy 素的.

(2) f 是 Fuzzy 拟素的.

(3) f 是 Fuzzy 弱拟素的.

证　(1) ⇒ (2)⇒ (3) 是显然的.

(3) ⟹ (1). 设对 S 的任意两个 Fuzzy 理想 f_1 和 f_2, $f_1 \circ f_2 \subseteq f$. 因为 S 是可换的, 所以 f 是 S 的 Fuzzy 理想且 $(f_1 \cup f) \circ (f_2 \cup f) \subseteq f_1 \circ f_2 \cup f_1 \circ f \cup f \circ f_2 \cup f^2 \subseteq f$. 根据 (3), $f_1 \cup f = f$ 或 $f_2 \cup f = f$, 即 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$. 证毕. □

4.4.13 定理　设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则下列各款等价:

(1) f 是 S 的 Fuzzy 弱拟素左理想;

(2) 对任意两个 Fuzzy 左理想 $f_1, f_2 \subseteq S$, 如果 $(f_1 \cup f) \circ (f_2 \cup f) \subseteq f$, 则 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$;

(3) 对任意两个 Fuzzy 左理想 $f_1, f_2 \subseteq S$, 如果 $f \subseteq f_1$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 则 $f_1 = f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

(4) 对任意两个 Fuzzy 左理想 $f_1, f_2 \subseteq S$, 如果 $(f_1 \cup f) \circ f_2 \subseteq f$, 则 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

(5) 对任意两个 Fuzzy 点 $a_r, b_t \in S(rt > 0)$, 如果 $(a_r \cup f) \circ S \circ (b_t \cup f) \subseteq f$, 则 $a_r \in f$, 或 $b_t \in f$.

证　(1) ⟹ (2). 因为 $f_1 \cup f$ 和 $f_2 \cup f$ 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $f \subseteq f_1 \cup f$, $f \subseteq f_2 \cup f$ 且 $(f_1 \cup f) \circ (f_2 \circ f) \subseteq f$, 则 $f = f_1 \cup f$ 或 $f = f_2 \cup f$, 即 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

(2) ⟹ (3)　对 S 的任意两个 Fuzzy 左理想 f_1 和 f_2, 如果 $f \subseteq f_1$, $f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 则

$$\begin{aligned} (f \cup f_1) \circ (f_2 \cup f) &\subseteq f_1 \circ (f \cup f_2) \\ &\subseteq f_1 \circ f \cup f_1 \circ f_2 \subseteq f. \end{aligned}$$

根据 (2), $f_1 \cup f = f$ 或 $f_2 \cup f = f$, 因此 $f_1 = f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

(3) ⟹ (4). 因为 $f \subseteq f \cup f_1$ 且 $(f \cup f_1) \circ f_2 \subseteq f$, 根据 (3), $f_1 \cup f = f$ 或 $f_2 \subseteq f$, 所以 $f_1 \subseteq f$ 或 $f_2 \subseteq f$.

(4) $\Longrightarrow$ (5). 设 $a_r, b_t (rt > 0)$ 是 S 的两个 Fuzzy 点使得 $(a_r \cup f) \circ S \circ (b_t \cup f) \subseteq f$. 则 $a_r \circ S \circ b_t \subseteq f$ 且 $f \circ S \circ b_t \subseteq f$. 因此

$$\begin{aligned}(a_r \cup S \circ a_r \cup f) \circ (S \circ b_t) &\subseteq a_r \circ S \circ b_t \cup S \circ a_r \circ S \circ b_t \cup f \circ S \circ b_t \\ &\subseteq f \cup S \circ f \subseteq f.\end{aligned}$$

因为 $a_r \cup S \circ a_r = L(a_r)$ 和 $S \circ b_t$ 是 S 的 Fuzzy 左理想. 由 (4), $L(a_r) \subseteq f$ 或 $S \circ b_t \subseteq f$ 成立. 如果 $L(a_r) \subseteq f$, 则 $a_r \in L(a_r) \subseteq f$. 如果 $S \circ b_t \subseteq f$, 则

$$\begin{aligned}(L(b_t) \cup f) \circ L(b_t) &\subseteq L(b_t)^2 \cup f \circ L(b_t) \\ &\subseteq S \circ b_t \subseteq f.\end{aligned}$$

由 (4), $b_t \in L(b_t) \subseteq f$ 成立.

(5) $\Longrightarrow$ (1). 设 f_1 和 f_2 是 S 的两个 Fuzzy 左理想使得 $f \subseteq f_1$, $f \subseteq f_2$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$. 如果 $f_1 \neq f$, $f_2 \neq f$, 则存在 $x, y \in S$ 使得 $f_1(x) > f(x)$, $f_2(y) > f(y)$. 设 $r = f_1(x), t = f_2(y)$. 则 $rt > 0$ 且

$$(x_r \cup f) \circ S \circ (y_t \cup f) \subseteq f_1 \circ S \circ f_2 \subseteq f_1 \circ f_2 \subseteq f.$$

由 (5), 我们有 $x_r \in f$ 或 $y_t \in f$. 矛盾. 证毕. □

4.4.14 定理　设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想且 μ 是 S 的 Fuzzy 子集满足:

(1) $f \cap \mu = 0$;

(2) 对任意 $a_t, b_r \in \mu$, $(a_t \cup f) \circ S \circ (b_r \cup f) \cap \mu \neq 0$.

如果 g 是包含 f 的 S 的极大 Fuzzy 左理想且 $g \cap \mu = 0$, 则 g 是 S 的 Fuzzy 弱拟素左理想.

证　设 f_1 和 f_2 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g \subseteq f_1, f_2$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq g$. 如果 $g \subset f_1$ 且 $g \subset f_2$, 则存在 $a_t \in f_1 \backslash g$, $b_r \in f_2 \backslash g$ $(rt > 0)$. 因此 $g \subset g \cup L(a_t) \subseteq f_1, g \subset g \cup L(b_r) \subseteq f_2$. 根据假设, $(g \cup L(a_t)) \cap \mu \neq 0, (g \cup L(b_r)) \cap \mu \neq 0$. 设 $c_k \in (g \cup L(a_t)) \cap \mu (k > 0), d_l \in (g \cup L(b_r)) \cap \mu (l > 0)$. 则

$$\begin{aligned}(c_k \cup f) \circ S \circ (d_l \cup f) &\subseteq (f_1 \cup f) \circ S \circ (f_2 \cup f) \\ &\subseteq f_1 \circ S \circ f_2 \cup f_1 \circ S \circ f \\ &\quad \cup f \circ S \circ f_2 \cup f \circ S \circ f \\ &\subseteq f_1 \circ f_2 \subseteq g.\end{aligned}$$

这和事实 $(c_k \cup f) \circ S \circ (d_l \cup f) \cap \mu \neq 0$ 矛盾. 证毕. □

设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想, 我们现在定义 S 的两个 Fuzzy 子集, 分别记为 $i(f)$ 和 $I(f)$. 定义如下:

$$(\forall x \in S)\ \ i(f)(x) = \bigvee\{t_\alpha \mid x_{t_\alpha} \in f, x_{t_\alpha} \circ S \subseteq f, t_\alpha \in [0,1]\},$$
$$I(f)(x) = \bigvee\{t_\alpha \mid f \circ x_{t_\alpha} \subseteq f, t_\alpha \in [0,1]\}$$

4.4.15 定理 设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 $i(f)$ 是 S 的包含 f 的最大的 Fuzzy 理想.

证 对任意 $x, y \in S$, 设

$$A(x) = \{t_\alpha \mid x_{t_\alpha} \in f, x_{t_\alpha} \circ S \subseteq f, t_\alpha \in [0,1]\},$$
$$B(xy) = \{w_\beta \mid (xy)_{w_\beta} \in f, (xy)_{w_\beta} \circ S \subseteq f, w_\beta \in [0,1]\},$$
$$C(y) = \{q_\gamma \mid y_{q_\gamma} \in f, y_{q_\gamma} \circ S \subseteq f, q_\gamma \in [0,1]\}.$$

则 $i(f)(x) = \bigvee\limits_{t_\alpha \in A(x)} t_\alpha$, $i(f)(xy) = \bigvee\limits_{w_\beta \in B(xy)} w_\beta$, and $i(f)(y) = \bigvee\limits_{q_\gamma \in C(y)} q_\gamma$. 如果 $t_\alpha \in A(x)$, 那么

$$x_{t_\alpha} \circ y_{t_\alpha} = (xy)_{t_\alpha} \in x_{t_\alpha} \circ S \subseteq f,$$
$$(xy)_{t_\alpha} \circ S = x_{t_\alpha} \circ (y_{t_\alpha} \circ S) \subseteq x_{t_\alpha} \circ S \subseteq f.$$

因此 $t_\alpha \in B(xy)$. 由此导出 $i(f)(xy) \geqslant i(f)(x)$. 同样方式, 我们能证明 $i(f)(xy) \geqslant i(f)(y)$. 因此 $i(f)$ 是 S 的 Fuzzy 理想. 对任意 $x \in S$, 设 $t_\alpha \in A(x)$. 则 $x_{t_\alpha} \in f$, 即 $t_\alpha \leqslant f(x)$. 因此 $i(f)(x) \leqslant f(x)$. 设 g 是 S 的 Fuzzy 理想 S 使得 $g \subseteq f$, 且 $x_t \in g \subseteq f$. 则 $t \in A(x)$. 故 $g(x) = \bigvee\limits_{x_t \in g} t \leqslant i(f)(x) \Rightarrow g \subseteq i(f)$. 证毕. □

4.4.16 定理 设 S 是带有单位元 e 的幺半群, f 是 S 的 Fuzzy 素左理想. 如果 $i(f) \neq 0$, 那么 $i(f)$ 是 S 的 Fuzzy 拟素理想.

证 设 a_t 和 b_r $(tr > 0)$ 是 S 的 Fuzzy 点使得 $a_t \circ S \circ b_r \subseteq i(f)$. 则 $(S \circ a_t \circ S) \circ (S \circ b_r \circ S) \subseteq i(f) \subseteq f$. 因为 f 是 Fuzzy 素左理想, 所以 $S \circ a_t \circ S \subseteq f$ 或 $S \circ b_r \circ S \subseteq f$. 譬如 $S \circ a_t \circ S \subseteq f$. 由定理 4.4.15, $S \circ a_t \circ S \subseteq i(f)$ 成立. 因为 S 有单位元 e, 所以 $a_t = (eae)_t = e_t \circ a_t \circ e_t \subseteq S \circ a_t \circ S \subseteq i(f)$. 根据定理 4.4.5, 完成证明. □

4.4.17 定理 设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 $I(f)$ 是 S 的使得 f 是其 Fuzzy 理想的最大 Fuzzy 子半群.

证 对任意 $x, y \in S$, 设 $f(x) = t$. 则 $x_t \in f$. 现定义两个集合如下:

$$D(x) = \{t_\alpha \mid f \circ x_{t_\alpha} \subseteq f, t_\alpha \in [0,1]\},$$
$$E(y) = \{r_\beta \mid f \circ y_{r_\beta} \subseteq f, r_\beta \in [0,1]\}.$$

(1) 因为 $f\circ x_t\subseteq f\circ f\subseteq f$, 所以 $t\in D(x)$. 因此 $f(x)=t\leqslant \bigvee_{t_\alpha\in D(x)} t_\alpha = I(f)(x)$, 即 $I(f)$ 是 S 的包含 f 的 Fuzzy 子集.

(2) $I(f)$ 是 S 的 Fuzzy 子半群. 事实上,

$$\begin{aligned} I(f)(x)\wedge I(f)(y) &= (\sup_{t_\alpha\in D(x)} t_\alpha)\wedge(\sup_{r_\beta\in E(y)} r_\beta) \\ &= \sup_{t_\alpha\in D(x), r_\beta\in E(y)} (t_\alpha\wedge r_\beta). \end{aligned}$$

因为 $f\circ x_{t_\alpha}\circ y_{r_\beta}=(f\circ x_{t_\alpha})\circ y_{r_\beta}=f\circ(xy)_{t_\alpha\wedge r_\beta}\subseteq f\circ y_{r_\beta}\subseteq f$, 所以 $t_\alpha\wedge r_\beta\leqslant I(f)(xy)$. 因此 $I(f)(x)\wedge I(f)(y)\leqslant I(f)(xy)$.

(3) f 是 $I(f)$ 的 Fuzzy 理想. 事实上, 因为 f 是 S 的 Fuzzy 左理想, 所以 $I(f)\circ f\subseteq S\circ f\subseteq f$. 进一步地, 对任意 $x\in S$, 如果 x 可以表示为 $x=yz$, 设 $F(z)=\{q_\gamma\mid f\circ z_{q_\gamma}\subseteq f, q_\gamma\in[0,1]\}$. 则

$$\begin{aligned} f\circ I(f)(x) &= \sup_{x=yz}(f(y)\wedge I(f)(z)) \\ &= \sup_{x=yz}(f(y)\wedge \sup_{q_\gamma\in F(z)} q_\gamma) \\ &= \sup_{x=yz}\sup_{q_\gamma\in F(z)}(f(y)\wedge q_\gamma). \end{aligned}$$

因为对任意 $q_\gamma\in F(z)$, $f\circ z_{q_\gamma}\subseteq f$, 所以 $f(x)\geqslant f(y)\wedge z_{q_\gamma}(z)\geqslant f(y)\wedge q_\gamma$. 因此 $f(x)\geqslant \sup_{x=yz}\sup_{q_\gamma\in F(z)}(f(y)\wedge q_\gamma)=f\circ I(f)(x)$. 如果 x 不能表示为 $x=yz$, 显然 $f(x)\geqslant 0=f\circ I(f)(x)$. 因此 $f\circ I(f)\subseteq f$.

(4) 设 g 是 S 的 Fuzzy 子半群使得 f 是 g 的 Fuzzy 理想. 对任意 $x\in S$, 如果 $g(x)=t$, 则 $x_t\in g$, 且 $f\circ x_t\subseteq f\circ g\subseteq f$. 因此 $t\in D(x)$, 由此推出 $I(f)(x)\geqslant t=g(x)$. 故 $I(f)$ 是 S 的使得 $I(f)$ 为其 Fuzzy 理想的最大的 Fuzzy 子半群. 证毕. □

4.4.18 定理　设 S 是带有单位元 e 的幺半群, f 是 S 的 Fuzzy 左理想但不是 S 的 Fuzzy 理想. 则下列各款等价:

(1) f 是 S 的 Fuzzy 弱拟素左理想;

(2) 如果 f_1 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $f\circ f_1\subseteq f$, 则 $f_1\subseteq f$;

(3) 对任意 Fuzzy 点 $a_t\in S$, 如果 $f\circ(S\circ a_t)\subseteq f$, 则 $a_t\in f$;

(4) f 是包含在 $I(f)$ 中的 S 的最大 Fuzzy 左理想.

证　(1)$\Longrightarrow$(2). 设 f_1 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $f\circ f_1\subseteq f$. 则 $(f\circ S)\circ f_1\subseteq f\circ f_1\subseteq f$. 因为 S 有单位元 e, 对任意 $x\in S$, $(f\circ S)(x)=\sup_{x=yz}(f(y)\wedge S(e))\geqslant f(x)\wedge S(e)=f(x)$. 因此 $f\subseteq f\circ S$. 因为 f 不是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $f\neq f\circ S$. 由定理 4.4.13(3), $f_1\subseteq f$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 对任意 Fuzzy 点 $a_t \in S$, 如果 $f \circ (S \circ a_t) \subseteq f$. 根据 (2), $S \circ a_t \subseteq f$. 因为 S 有单位元 e, 因此 $S \circ a_t(a) \geqslant S(e) \wedge a_t(a) = t$. 从而 $a_t \in S \circ a_t \subseteq f$.

(3) $\longrightarrow$ (4). 根据定理 4.4.17, $f \subseteq I(f)$. 设 g 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g \subseteq I(f)$. 则 $g \subseteq f$. 事实上, 对任意 $a_t \in g$, 因为 $f \circ (S \circ a_t) \subseteq f \circ (S \circ g) \subseteq f \circ g \subseteq f \circ I(f) \subseteq f$, 由 (3) $a_t \in f$. 因此 $g = \bigvee_{a_t \in g} a_t \subseteq f$.

(4) $\Longrightarrow$ (1). 设 f_1, f_2 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $f \subseteq f_1, f \subseteq f_2$ 且 $f_1 \circ f_2 \subseteq f$. 因为 $f \circ f_2 \subseteq f_1 \circ f_2 \subseteq f$, 所以对任意 $x_t \in f_2$, $f \circ x_t \subseteq f$ 成立. 因此 $I(f) \geqslant t = x_t(x) \Rightarrow x_t \in I(f)$. 故 $f_2 = \bigvee_{x_t \in f_2} x_t \subseteq I(f)$ 因为 f 是包含在 $I(f)$ 中 S 的最大的 Fuzzy 左理想, 所以 $f_2 \subseteq f$. 故 $f = f_2$. 证毕. □

4.4.19 注 我们知道半群的 Fuzzy 理想 (左, 右理想) 在半群的结构研究中起着非常重要的作用. 作为本节结果的应用, 我们可以得出半群的素左理想的相应的结论. 在环论中我们知道一个有单位元的环是单的当且仅当它的每个左理想是素的. 自然地我们会问, 在半群中我们有类似的结论吗? 即是否存在结论: 一个半群 S 是 Fuzzy 单的当且仅当它的 Fuzzy 左理想是 Fuzzy 素的?

4.5 半单半群

本节的目的是通过 Fuzzy 理想和 Fuzzy 素理想类刻画半单半群.

一个半群称为 *半单* 的, 如果 S 的每个理想是幂等的. 下面的引理给出了半单半群的刻画.

4.5.1 引理 [98] 设 S 是半群. 则下列各款等价:

(1) S 是半单的;

(2) $(\forall a \in S)\ a \in SaSaS$;

(3) 对 S 的任意理想 $A, B \subseteq S$, $A \cap B = AB$.

证 假设 (1) 成立, 则 a 生成的理想 S^1aS^1 是幂等的. 因此 (2) 成立. 事实上,

$$
\begin{aligned}
a \in S^1aS^1 &= \{a\} \cup aS \cup Sa \cup SaS = (\{a\} \cup aS \cup Sa \cup SaS)^2 \\
&= (\{a\} \cup aS \cup Sa \cup SaS)^3 \subseteq SaSaS.
\end{aligned}
$$

假设 (2) 成立, 设 A, B 为 S 的两个理想. 当然 $AB \subseteq A \cap B$. 设 $a \in A \cap B$. 则 $a \in SaSaS \subseteq (SA)(SBS) \subset AB$. 因此 $A \cap B = AB$. (3) 推 (1) 是显然的. 证毕. □

4.5.2 定理 设 S 是半群. 则下列各款等价:

(1) S 是半单的;

(2) S 的每个 Fuzzy 理想是幂等的;

(3) 对 S 的任意理想 f, g, $f \cap g = f \circ g$;

(4) S 的所有 Fuzzy 理想集关于理想的并和乘法构成分配格.

证　(1) $\Longrightarrow$ (3). 假设 (1) 成立, $a \in S$. 由引理 3.5.1, $a \in SaSaS$. 存在 $x, y, z \in S$ 使得 $a = xayaz$. 对 S 的任意 Fuzzy 理想 f, g,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a) &= \sup_{a=bc}[\min\{f(b), g(c)\}] \\ &\geqslant \min\{f(xa), g(yaz)\} \geqslant \min\{f(a), g(a)\} \\ &= (f \cap g)(a).\end{aligned}$$

因此 $f \cap g \subseteq f \circ g$. 因为 f, g 均为 S 的 Fuzzy 理想, 所以

$$f \circ g \subseteq f \circ S \subseteq f,\ f \circ g \subseteq S \circ g \subseteq g.$$

因此 $f \cap g = f \circ g$.

(3) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (4) 均显然.

(4) $\Longrightarrow$ (2). 由假设 S 的每个 Fuzzy 理想 f, f 和 f 的交为 $f = f \circ f$. 因此 (2) 成立.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 A 为 S 的理想, 则它的特征函数 f_A 为 S 的 Fuzzy 理想. 因此 $f_A = f_A \circ f_A$. 设 $a \in A$. $f_A(a) = 1 = (f_A \circ f_A)(a) = \sup_{a=bc}[\min\{f_A(b), f_A(c)\}]$. 因此存在 $p, q \in S$ 使得 $a = pq$, $f_A(p) = f_A(q) = 1$, 即 $a = pq \in AA = A^2$. 由 a 的任意性, $A \subseteq A^2$, 显然 $A^2 \subseteq A$. 故 $A = A^2$. 根据引理 4.5.1, S 是半单的.　□

4.5.3 定理　设 S 是半群. 则下列各款等价:

(1) S 是半单的;

(2) 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_λ, b_μ, $(a_\lambda) \circ (b_\mu) = (a_\lambda) \cap (b_\mu)$;

(3) 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_λ, $(a_\lambda)^2 = (a_\lambda)$;

(4) 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_λ, $a_\lambda \in S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S$.

证　根据定理 4.5.2, (1) $\Rightarrow$ (2) , (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_λ, 因为 $(a_\lambda)^2 = (a_\lambda)$, 我们有 $a_\lambda \in (a_\lambda) = (a_\lambda)^5 = (a_\lambda)^4 \circ (a_\lambda)$. 根据定理 3.3.8, $(a_\lambda)^3 \subseteq S \circ a_\lambda \circ S$. 所以

$$\begin{aligned}(a_\lambda)^4 &\subseteq (S \circ a_\lambda \circ S) \circ (a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ &\subseteq S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(a_\lambda)^5 \subseteq\ & (S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda) \cup (S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S) \\ & \circ (a_\lambda \cup S \circ a_\lambda \cup a_\lambda \circ S \cup S \circ a_\lambda \circ S) \\ \subseteq\ & S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S.\end{aligned}$$

故 $a_\lambda \in S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S$.

(4) $\Longrightarrow$ (1). 类似于定理 3.3.8(4) 的证明，对 S 的任意 Fuzzy 点 $a_\lambda(\lambda > 0)$, $a_\lambda \in S \circ a_\lambda \circ S \circ a_\lambda \circ S$ 当且仅当 $a \in SaSaS$. 根据引理 4.5.1, 因此 S 是半单的. 证毕. □

4.5.4 定理 设 S 为半群. S 的每个 Fuzzy 理想是 Fuzzy 素的当且仅当 S 的所有 Fuzzy 理想集关于集合的包含关系构成链且 S 是半单的.

证 设 g 和 h 是 S 的 Fuzzy 理想. 因为 $g \circ h$ 也是 S 的 Fuzzy 理想. 由 $g \circ h \subseteq g \circ h$ 得出 $g \subseteq g \circ h \subseteq S \circ h \subseteq h$ 或 $h \subseteq g \circ h \subseteq g \circ S \subseteq g$. 因此 S 的 Fuzzy 理想集关于集合的包含关系构成链. 进一步地，对 S 的任意 Fuzzy 理想 f, 显然 $f^2 \subseteq f$. 因为 $f \circ f \subseteq f^2$, 所以 $f \subseteq f^2$, 结果 $f^2 = f$.

反之，设 f, g 是 S 的 Fuzzy 理想，且 $f \circ g \subseteq h$. 因为 S 的所有 Fuzzy 理想集关于集合的包含关系构成链，即 $f \subseteq g$ 或 $g \subseteq f$, 所以 $f^2 \subseteq f \circ g \subseteq h$ 或 $g^2 \subseteq f \circ g \subseteq h$. 由假设 $f \subseteq h$ 或 $g \subseteq h$ 成立. 证毕. □

半群 S 称为*内素正则*的如果 $a \in Sa^2S, \forall a \in S$.

4.5.5 定理 设 S 为半群. 则 S 的 Fuzzy 理想是 Fuzzy 完全素的当且仅当 S 的所有 Fuzzy 理想集关于集合的包含关系构成链且 S 是内素正则的.

证 根据定理 4.5.4, S 的 Fuzzy 理想集形成一条链且 S 的每个 Fuzzy 理想是 Fuzzy 完全半素的. 对任意 Fuzzy 点 $a_\lambda \in S$, 因为 $a_\lambda^4 = a_\lambda \circ a_\lambda^2 \circ a_\lambda$, 所以

$$
\begin{aligned}
a_\lambda^4 \in S \circ a_\lambda^2 \circ S \Rightarrow a_\lambda^2 &\in S \circ a_\lambda^2 \circ S \\
\Rightarrow a_\lambda &\in S \circ a_\lambda^2 \circ S \\
\Rightarrow a &\in Sa^2S \quad (\text{由定理 } 3.3.8(2, 5)).
\end{aligned}
$$

反之，因为 S 是内素正则的，所以 S 的 Fuzzy 理想是 Fuzzy 完全半素的. 事实上，设 f 是 S 的 Fuzzy 理想， $a_\lambda \in S$. 如果 $a_\lambda^2 \in f$, 因为 $a \in Sa^2S$, 由定理 3.3.8, $a_\lambda \in S \circ a_\lambda^2 \circ S \subseteq f$.

因为 S 的 Fuzzy 理想是 Fuzzy 完全半素的，我们有下列的 (1) 和 (2):

(1) $(a_\lambda) = S \circ a_\lambda \circ S, \forall a_\lambda \in S$. 事实上，显然 $S \circ a_\lambda \circ S \subseteq (a_\lambda)$. 因为 $a_\lambda^4 \in S \circ a_\lambda \circ S$, 所以 $a_\lambda^2 \in S \circ a_\lambda \circ S$ 且 $a_\lambda \in S \circ a_\lambda \circ S$. 因此 $(a_\lambda) \subseteq S \circ a_\lambda \circ S$.

(2) $(a_\lambda) \cap (b_\mu) = (a_\lambda \circ b_\mu), \forall a_\lambda, b_\mu \in S$. 事实上，因为 $a_\lambda \circ b_\mu \in (a_\lambda) \cap (b_\mu)$, 所以 $(a_\lambda \circ b_\mu) \subseteq (a_\lambda) \cap (b_\mu)$. 另一方面，设 $c_t \in (a_\lambda) \cap (b_\mu), t > 0$. By 1), 我们有 $c_t \in S \circ a_\lambda \circ S$ 且 $c_t \in S \circ b_\mu \circ S$. 因此 $c_t^2 \in S \circ (b_\mu \circ S \circ S \circ a_\lambda) \circ S$. 因为

$$
\begin{aligned}
(b_\mu \circ S \circ S \circ a_\lambda)^2 &\subseteq b_\mu \circ S \circ (a_\lambda \circ b_\mu) \circ S \circ a_\lambda \\
&\subseteq S \circ a_\lambda \circ b_\mu \circ S \\
&\subseteq (a_\lambda \circ b_\mu).
\end{aligned}
$$

因此根据定理 4.3.4 $b_\mu \circ S \circ S \circ a_\lambda \subset (a_\lambda \circ b_\mu)$. 结果 $c_t^2 \in S \circ a_\lambda \circ b_\mu \circ S \subseteq (a_\lambda \circ b_\mu)$. 因为 $(a_\lambda \circ b_\mu)$ 是 Fuzzy 完全半素的，$c_t \in (a_\lambda \circ b_\mu)$ 成立，即 $(a_\lambda) \cap (b_\mu) \subseteq (a_\lambda \circ b_\mu)$. 现设 f 是 S 的 Fuzzy 理想，$a_\lambda \circ b_\mu \in f$. 因为 S 的所有 Fuzzy 理想关于集合的包含关系构成链，所以 $(a_\lambda) \subseteq (b_\mu)$ 或 $(b_\mu) \subseteq (a_\lambda)$. 如果 $(a_\lambda) \subseteq (b_\mu)$，则 $a_\lambda \in (a_\lambda) = (a_\lambda) \cap (b_\mu) = (a_\lambda \circ b_\mu) \subseteq f$. 如果 $(b_\mu) \subseteq (a_\lambda)$，则 $b_\mu \in (b_\mu) = (a_\lambda) \cap (b_\mu) = (a_\lambda \circ b_\mu) \subseteq f$. 因此 f 是 Fuzzy 完全素的．证毕．□

4.5.6 定理　假设 S 是半单半群，f 是 S 的 Fuzzy 理想．如果 $f(x) = \alpha, x \in S, \alpha \in [0,1]$. 则存在的一个素理想 g 使得 $f \subseteq g$, 且 $g(x) = \alpha$.

证　设 $X = \{h \mid h$ 是 S 的 Fuzzy 理想$, f \subseteq h, h(x) = \alpha\}$. 因为 $f \in X$, 所以 $X \neq \emptyset$. 根据 Zorn 引理，X 中存在满足 $f \subseteq g, g(x) = \alpha$ 的极大元 g. 我们先证明 g 是 Fuzzy 交不可约的，再证明 g 是 Fuzzy 素的．

假设存在 S 的 Fuzzy 理想 h_1, 使得 $g = h_1 \cap h_2$. 则 $g \subseteq h_1, g \subseteq h_2$. 如果 $h_1 \neq g, h_2 \neq g$. 由 g 的极大性，必有 $h_1(x) \neq \alpha, h_2(x) \neq \alpha$. 因此 $f(x) = (h_1 \cap h_2)(x) \neq \alpha$. 矛盾．

设 h_1, h_2 是 S 的 Fuzzy 理想，$h_1 \circ h_2 \subseteq g$. 因此 $h_1 \circ h_2 \cup g = g$. 因为 S 是半单的，由定理 4.5.2, S 的所有 Fuzzy 理想集关于理想的并和乘法构成分配格．$g = h_1 \circ h_2 \cup g = (h_1 \cap h_2) \cup g = (h_1 \cup g) \cap (h_2 \cup g) = (h_1 \cup g) \circ (h_2 \cup g)$. 由上证明的 g 是交不可约的，$g = g \cap h_1$, 或 $g = g \cup h_2$. 即 $h_1 \subseteq g$ 或 $h_2 \subseteq g$. 证毕．□

4.5.7 定理　设 S 是半群．则下列各款等价：

(1) S 是半单的；

(2) S 的每个真 Fuzzy 理想是 S 的一个 Fuzzy 素理想簇的交．

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 是 S 的真 Fuzzy 理想，设 $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ 为 S 的所有包含 f 的理想簇．显然 $f \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Omega} f_\alpha$. 我们现在证明其反包含关系．设 $x \in S$. 由定理 4.5.3, 存在 S 的一个 Fuzzy 素理想 f_β 使得 $f \subseteq f_\beta, f(x) = f_\beta(x)$. 因此 $f_\beta \in \{f_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. 这意味着 $(\bigcap_{\alpha\in\Omega} f_\alpha)(x) \leqslant f_\beta(x) = f(x)$. 由 x 的任意性得出 $(\bigcap_{\alpha\in\Omega} f_\alpha) \subseteq f$. 因此 $(\bigcap_{\alpha\in\Omega} f_\alpha) = f$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 f 是 S 的真 Fuzzy 理想，存在 S 的 Fuzzy 素理想簇 $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ 使得 $f^2 = (\bigcap_{\alpha\in\Omega}) f_\alpha$. 因此 $f^2 \subseteq f_\alpha, \forall \alpha \in \Omega$. 因为 f_α 是 Fuzzy 素理想，因此 $f \subseteq f_\alpha$, 推出 $f \subset (\bigcap_{\alpha\in\Omega}) f_\alpha = f^2$. 由 f 为 S 的 Fuzzy 理想，当然 $f^2 \subseteq f$. 因此 $f^2 = f$. 根据引理 4.5.1, S 是半单的．证毕．□

假设我们用 $FI(S)$ 表示 S 的 Fuzzy 理想格，用 $FPI(S)$ 表示 S 的真素 Fuzzy 理想集．对 S 的任意 Fuzzy 理想 f, 记 $J_f := \{h \in FPI(S) \mid f \not\subseteq h\}$, $J_{FPI(S)} := \{J_f \mid f \in FI(S)\}$ 利用上面的结论，我们可以证明：

4.5.8 定理　假设是带零元的半单半群．则集 $J_{FPI(S)}$ 形成集合 $FPI(S)$ 上的拓扑，且映射 $\varphi: f \mapsto J_f$ 是格 $FI(S)$ 到 $FPI(S)$ 的开集格之间的同构映射．

证　我们首先证明集 $J_{FPI(S)}$ 形成集合 $FPI(S)$ 上的拓扑. 因为 S 到 $[0,1]$ 上的零函数 0 是 S 的 Fuzzy 素理想. 因此 J_0 是 $FPI(S)$ 的空子集. 容易看出 $J_S = FPI(S) \in J_{FPI(S)}$. 假设 $J_{f_1}, J_{f_2} \in J_{FPI(S)}$, $f_1, f_2 \in FI(S)$. 则 $J_{f_1} \cap J_{f_2} = \{h \in FPI(S) \mid f_1 \not\subseteq h, f_2 \not\subseteq h\}$. 因为 h 为 S 的素 Fuzzy 理想且 S 是半素的, 所以上式等价于 $J_{f_1} \cap J_{f_2} = \{h \in FPI(S) \mid f_1 \cap f_2 \not\subseteq h\} = J_{f_1 \cap f_2}$. 因此 $J_{f_1} \cap J_{f_2} \in J_{FPI(S)}$. 现给定 S 的一个 Fuzzy 理想簇 $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. 则 $\bigcup J_{f_\alpha} = \bigcup\{h \in FPI(S) \mid f_\alpha \not\subseteq h\} = \{h \in FPI(S) \mid \bigcup f_\alpha \not\subseteq h\} = J_{\cup_\alpha f_\alpha}$. 因此 $\bigcup J_{f_\alpha} \in J_{FPI(S)}$. 以上证明了集 $J_{FPI(S)}$ 形成集合 $FPI(S)$ 上的拓扑.

容易验证映射 $\varphi : f \hookrightarrow J_f$ 是格 $FI(S)$ 到 $FPI(S)$ 的开集格之间的格同态. 下面仅证 φ 是双射. 事实上, 如果 $f_1 = f_2$, 当然 $J_{f_1} = J_{f_2}$. 反之, 如果 $J_{f_1} = J_{f_2}$, 但是 $f_1 \neq f_2$. 存在 $x \in S$ 使得 $f_1(x) > f_2(x)$ 或 $f_2(x) > f_1(x)$. 不妨设 $f_1(x) > f_2(x)$. 由定理 4.5.3, 存在 S 的 Fuzzy 素理想 f 使得 $f_2 \subseteq f$ 且 $f(x) = f_2(x)$. 因为 $f_1(x) > f(x)$, 所以 $f_1 \not\subseteq f$. 这意味着 $f \in J_{f_1}$. 又因为 $J_{f_1} = J_{f_2}$, 所以 $f \in J_{f_2}$. 这又推出 $f_2 \subseteq f$. 矛盾. 证毕. □

本节的最后我们通过 Fuzzy 拟 - 素左理想研究强半单半群.　S 的一个 Fuzzy 左理想 f 称为 **幂等** 的, 如果 $f = f \circ f$, 即 $f = f^2$.

4.5.9 定义　半群 S 称为 **强半单** 的, 如果 S 的每个左理想是幂等的.

4.5.10 引理　设 S 是半群. 则下列各款等价:

(1) S 是强半单;

(2) 对任意的 $a \in S$, $a \in SaSa$.

证　对任意的 $a \in S$, 因为 S 是强半单的, 所以 $L(a) = L(a)^2$. 因此 $L(a) = L(a)^4$. 因为 $L(a)^2 = (a \cup Sa)(a \cup Sa) \subseteq Sa \cup SaSa$, 所以 $a \in L(a) = L(a)^4 \subseteq (Sa \cup SaSa)(Sa \cup SaSa) \subseteq SaSa$.

反之, 设 L 是 S 的左理想. 对任意 $a \in L$, 由假设 $a \in SaSa \subset L(a)L(a) \subseteq L^2$. 因此 $L \subseteq L^2$. 显然 $L^2 \subseteq L$. 故 $L^2 = L$. 证毕. □

下列定理通过 Fuzzy 拟 - 素左理想来刻画强半单半群.

4.5.11 定理　设 S 是半群. 则下列各款等价:

(1) S 的每个 Fuzzy 左理想是幂等的;

(2) 对 S 的任意两个 Fuzzy 左理想 f_1 和 f_2, $f_1 \cap f_2 \subseteq f_1 \circ f_2$;

(3) 对任意的 Fuzzy 点 $a_r \in S$, $L(a_r) = L(a_r)^2$;

(4) 对任意的 Fuzzy 点 $a_r \in S$, $a_r \in S \circ a_r \circ S \circ a_r$;

(5) S 的每个 Fuzzy 左理想是 Fuzzy 拟 - 半素左理想;

(6) S 的每个 Fuzzy 左理想是 S 的包含它的所有 Fuzzy 拟 - 素左理想的交.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f_1, f_2 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 $S \circ (f_1 \cap f_2) \subseteq S \circ f_1 \cap S \circ f_2 \subseteq$

$f_1 \cap f_2$. 因此 $f_1 \cap f_2$ 是 S 的 Fuzzy 左理想. 由假设

$$\begin{aligned} f_1 \cap f_2 &= (f_1 \cap f_2)^2 \\ &= (f_1 \cap f_2) \circ (f_1 \cap f_2) \subseteq f_1 \circ f_2. \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_r, 设 $f_1 = f_2 = L(a_r)$. 根据假设 $L(a_r) \subseteq L(a_r)^2$ 另一方面 $L(a_r)^2 \subseteq S \circ L(a_r) \subseteq L(a_r)$. 因此 $L(a_r) = L(a_r)^2$ 成立.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 对 S 的任意 Fuzzy 点 a_r, 由假设

$$\begin{aligned} a_r &\in L(a_r) = L(a_r)^2 \\ &= (a_r \cup S \circ a_r) \circ (a_r \cup S \circ a_r) \\ &\subseteq a_r^2 \cup a_r \circ S \circ a_r \cup S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a_r^2 &\in (a_r^2 \cup a_r \circ S \circ a_r \cup S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r) \circ a_r \\ &\subseteq a_r^3 \cup a_r \circ S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r^3 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r^2 \\ &\subseteq S \circ a_r^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} a_r \circ S \circ a_r &\subseteq (a_r^2 \cup a_r \circ S \circ a_r \cup S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r) \circ (S \circ a_r) \\ &\subseteq S \circ a_r \circ S \circ a_r. \end{aligned}$$

故 $a_r \in S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r$. 这意味着

$$\begin{aligned} a_r &\in (S \circ a_r) \circ a_r \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r \\ &\subseteq (S \circ a_r) \circ (S \circ a_r^2 \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r) \cup S \circ a_r \circ S \circ a_r \\ &\subseteq S \circ a_r \circ S \circ a_r. \end{aligned}$$

(4) $\Longrightarrow$ (5). 设 g 是 S 的 Fuzzy 左理想使得 $g^2 \subseteq f$. 对任意的 Fuzzy 点 $a_r \in g$, 由假设

$$\begin{aligned} a_r &\in S \circ a_r \circ S \circ a_r \subseteq S \circ g \circ S \circ g \\ &\subseteq g^2 \subseteq f. \end{aligned}$$

因为 $g = \bigcup\limits_{a_r \in g} a_r$, 所以 $g \subseteq f$.

(5) $\Longrightarrow$ (1). 设 f 是 S 的任意 Fuzzy 左理想. 则 f^2 也是 S 的 Fuzzy 左理想. 由假设, 因为 $f^2 \subseteq f^2$, 所以 $f \subseteq f^2$. 显然 $f^2 \subseteq f$. 这导出 $f^2 = f$.

(2) $\Longrightarrow$ (6). 设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想且

$$\mathcal{N}=\{g_\alpha \mid g_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 Fuzzy 拟 - 素左理想使得 } f\subset g_\alpha\}.$$

显然 $f\subseteq \bigcap\limits_{g_\alpha\in\mathcal{N}} g_\alpha$.

反之, 对任意 $a_r\in \bigcap\limits_{g_\alpha\in\mathcal{N}} g_\alpha$, 如果 $a_r\notin f$, 则 $r>0$ 且 $f(a)<r$. 设

$$\mathcal{B}=\{h_\beta \mid h_\beta \text{ 是 } S \text{ 的 Fuzzy 左理想使得} f\subseteq h_\beta, f(a)=h_\beta(a)\}.$$

因为 $f\in\mathcal{B}$, 所以 $\mathcal{B}\neq\emptyset$. 因此 $(\mathcal{B},\subseteq)$ 是序集. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的链. 则集合 $\bigcup\limits_{h_\beta\in\mathcal{C}} h_\beta$ 是 S 的一个 Fuzzy 左理想且 $f\subseteq \bigcup\limits_{h_\beta\in\mathcal{C}} h_\beta$. 因为对任意的 $h_\beta\in\mathcal{C}$, $f(a)=h_\beta(a)$, 所以 $\bigcup\limits_{h_\beta\in\mathcal{C}} h_\beta(a)=f(a)$. 因此 Fuzzy 左理想 $\bigcup\limits_{h_\beta\in\mathcal{C}} h_\beta$ 是 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{B}$ 中的上界. 根据 Zorn 引理, $\mathcal{B}$ 有极大元, 记为 $h_{\max}$. 则 $a_r\notin h_{\max}$. 我们现在证明 $h_{\max}$ 是 S 的 Fuzzy 拟 - 素左理想. 设 f_1 和 f_2 是 S 的两个 Fuzzy 左理想使得 $f_1\circ f_2\subseteq h_{\max}$. 则由假设 $f_1\cap f_2\subseteq f_1\circ f_2\subseteq h_{\max}$. 因此 $h_{\max}=h_{\max}\cup(f_1\cap f_2)=(h_{\max}\cup f_1)\cap(h_{\max}\cup f_2)$. 我们现在可以得出 $h_{\max}=h_{\max}\cup f_1$ 或 $h_{\max}=h_{\max}\cup f_2$, 即 $f_1\subseteq h_{\max}$ 或 $f_2\subseteq h_{\max}$. 事实上, 如果 $h_{\max}\subset h_{\max}\cup f_1$, $h_{\max}\subset h_{\max}\cup f_2$, 因为 $h_{\max}$ 是关于性质 $f\subseteq h_{\max}$ 和 $h_{\max}(a)=f(a)$ 是极大的, 所以 $h_{\max}\cup f_1(a)\neq f(a)$, $h_{\max}\cup f_2(a)\neq f(a)$. 因此 $h_{\max}(a)=((h_{\max}\cup f_1)(a))\cap((h_{\max}\cup f_2)(a))\neq f(a)$. 矛盾.

(6) $\Longrightarrow$ (1). 设 f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 f^2 也是 S 的 Fuzzy 左理想. 由假设 $f^2=\bigcap\limits_{g\in\mathcal{M}} g$, 这里 $\mathcal{M}$ 是 S 的所有包含 f^2 的 Fuzzy 拟 - 素左理想集.

对任意的 $g\in\mathcal{M}$, 显然 $f\circ f\subseteq g$. 因为 g 是 Fuzzy 拟 - 素的, 所以 $f\subseteq g$ 成立. 因此 $f\subseteq \bigcap\limits_{g\in\mathcal{M}} g=f^2$. 故 $f^2=f$. 证毕. □

由引理 4.5.10 和定理 4.5.11, 我们有

4.5.12 定理　半群 S 是强半单的当且仅当它的每个 Fuzzy 左理想上幂等的.

4.5.13 定理　设 S 是可换的半群. 则 S 的每个 Fuzzy 左理想是 Fuzzy 拟 - 素的当且仅当它们关于通常的序关系形成一条链且 S 是强半单的.

证　设 g 和 h 是 S 的 Fuzzy 左理想. 因为 $g\circ h$ 也是 S 的 Fuzzy 左理想, $g\circ h\subseteq g\circ h$, 所以 $g\subseteq g\circ h\subseteq S\circ h\subseteq h$ 或 $h\subseteq g\circ h\subseteq g\circ S\subseteq g$. 因此 S 的 Fuzzy 左理想集关于 Fuzzy 集通常序关系形成链. 而且对任意 Fuzzy 左理想 f, 显然 $f^2\subseteq f$. 因为 $f\circ f\subseteq f^2$, 所以 $f\subseteq f^2$, 故 $f^2=f$.

反之, 设 f,g 是 S 的两个 Fuzzy 左理想且 $f\circ g\subseteq h$. 因为 S 的 Fuzzy 左理想形成链, 即 $f\subseteq g$ 或 $g\subseteq f$, 所以 $f^2\subseteq f\circ g\subseteq h$ 或 $g^2\subset f\circ g\subseteq h$. 由假设 $f\subseteq h$ 或 $g\subseteq h$ 成立. 证毕. □

4.6 Fuzzy 理想扩张

本节我们讨论半群 S 的 Fuzzy 理想的扩张和 Fuzzy 3- 素理想. 通过 Fuzzy 理想的扩张研究 Fuzzy 素理想和 Fuzzy 3- 素理想的关系.

4.6.1 定义　设 $(S,\cdot)$ 是半群, f 是 S 的 Fuzzy 子集, $x\in S$. 如下定义的 Fuzzy 子集 $\langle x,f\rangle : S\to[0,1] \mid y\to\langle x,f\rangle(y):=f(xy)$ 称为 f 的关于 x 的扩张.

4.6.2 定理　设 S 是可换半群. 如果 f 是 S 的 Fuzzy 理想, $x\in S$, 则 f 关于 x 的扩张也是 S 的 Fuzzy 理想.

证　显然 $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 子集. 设 $y,z\in S$. 则 $\langle x,f\rangle(yz):=f(xyz)\geqslant f(xy)=\langle x,f\rangle(y)$. 因为 S 是可换的且 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $\langle x,f\rangle(yz):=f(xyz)=f(yxz)\geqslant f(xz):=\langle x,f\rangle(z)$. □

设 $(S,\cdot)$ 是半群, f 是 S 的 Fuzzy 子集, 记 $\mathrm{supp}f:=\{x\in S\mid f(x)>0\}$.

4.6.3 定理　设 S 是半群, f 是 S 的 Fuzzy 理想, $x\in S$. 则下列各款成立:

(1) $f\subseteq\langle x,f\rangle$;

(2) $\langle x^n,f\rangle\subseteq\langle x^{n+1},f\rangle, \forall n\in\mathbf{N}$;

(3) 如果 $f(x)>0$, 则 $\mathrm{supp}\langle x,f\rangle=S$.

证　(1) 设 $y\in S$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $\langle x,f\rangle(y):=f(xy)\geqslant f(y)$. 因此 $f\subseteq\langle x,f\rangle$.

(2) 设 $n\in\mathbf{N}, y\in S$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $\langle x^{n+1},f\rangle(y):=f(x^{n+1}y)=f(xx^ny)\geqslant f(x^ny):=\langle x^n,f\rangle(y)$. 因此 $\langle x^n,f\rangle\subseteq\langle x^{n+1},f\rangle$.

(3) 因为 $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 子集, 当然 $\mathrm{supp}\langle x,f\rangle\subseteq S$. 设 $y\in S$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $\langle x,f\rangle(y):=f(xy)\geqslant f(x)>0$. 因此 $\langle x,f\rangle(y)>0$ 且 $y\in\mathrm{supp}\langle x,f\rangle$. 证毕. □

4.6.4 注　如果 S 是半群且 f 是 S 的 Fuzzy 素子集, 则 $\langle x,f\rangle=\langle x^2,f\rangle, \forall x\in S$. 事实上. 设 $x,y\in S$. 则 $\langle x,f\rangle(y):=f(xy), \langle x^2,f\rangle(y):=f(x^2y)$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 素子集, 所以 $f(x)=f(x^2)$, 且 $f(xy)=\max\{f(x),f(y)\}=\max\{f(x^2),f(y)\}=f(x^2y)$.

如果 S 是半群, $A\subseteq S, x\in S$, 定义 $\langle x,A\rangle:=\{y\in S\mid xy\in A\}$.

4.6.5 定理　设 S 是半群且 $\emptyset\neq A\subseteq S$. 则 $\langle x,f_A\rangle=f_{\langle x,A\rangle}, \forall x\in S$.

证　设 $x\in S, y\in S$. 则

$$\langle x,f_A\rangle(y):=f_A(xy). \tag{$*$}$$

A) 如果 $xy\in A$, 则 $f_A(xy):=1$. 因为 $xy\in A$, 所以 $y\in\langle x,A\rangle$, 即 $f_{\langle x,A\rangle}(y):=1$. 由 $(*)$, $\langle x,f_A\rangle(y)=f_{\langle x,A\rangle}(y)$.

B) 设 $xy \notin A$. 则 $f_A(xy) := 0$. 因为 $xy \notin A$, 所以 $y \notin \langle x, A\rangle$, 即 $f_{\langle x,A\rangle}(y) := 0$. 由 (*), $\langle x, f_A\rangle(y) = f_{\langle x,A\rangle}(y)$. 证毕. □

4.6.6 定理　设 S 是半群. 如果 f 是 S 的 Fuzzy 素子集, $x \in S$ 使得 $f(x) = \inf_{y\in S} f(y)$, 则 $\langle x, f\rangle = f$. 反之, 设 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 对任意 $y \in S$ 使得 $f(y)$ 在 $f(S)$ 中不是极大的, $\langle y, f\rangle = f$ 成立. 则 f 是 Fuzzy 素的.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 素子集, $x \in S$ 使得 $f(x) = \inf_{y\in S} f(y)$ 首先 $\inf_{y\in S} f(y) \in [0,1]$. 设 $y \in S$, 则 $\langle x, f\rangle(y) := f(xy)...(*)$. 因为 f 是 Fuzzy 素的, 所以 $f(xy) = \max\{f(x), f(y)\}$, 即 $f(xy) = f(x)$ 或 $f(xy) = f(y)...(**)$. 设 $f(xy) \neq f(y)$. 则由 (**), $f(xy) = f(x)...(***)$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $f \subseteq \langle x, f\rangle$. 由 (***), $f(y) \leqslant \langle x, f\rangle(y) := f(xy) = f(x)$. 因为 $f(x) = \inf_{y\in S} f(y)$, 所以 $f(x) \leqslant f(y)$. 因此根据 (***) $f(x) = f(y)$, 且 $f(xy) = f(y)$. 矛盾. 只有 $f(xy) = f(y)$. 再由 (*), $\langle x, f\rangle(y) := f(y)$.

反之, 设 $x_1, x_2 \in S$. 则 $f(x_1x_2) = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. 事实上, 因为 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $f(x_1x_2) \geqslant f(x_1)$, 且 $f(x_1x_2) \geqslant f(x_2)...(*)$.

A) 设 $f(x_1x_2) = f(x_1)$. 则由 (*), $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. 因此 $\max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_1) = f(x_1x_2)$.

B) 设 $f(x_1x_2) \neq f(x_1)$. 则元素 $f(x_1)$ 在 $f(S)$ 中不是极大的. 事实上, 如果 $f(x_1)$ 是 $f(S)$ 的极大元素, 则由 (*), $f(x_1x_2) = f(x_1)$. 矛盾. 由假设 $\langle x_1, f\rangle = f$. 因此 $\langle x_1, f\rangle(x_2) = f(x_2)$, 且 $f(x_1x_2) = f(x_2)$. 由 (*), $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, 所以 $\max\{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_2)$, 且 $f(x_1x_2) = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. 证毕. □

4.6.7 推论　设 S 是半群, I 是 S 的理想. 则 I 是素的当且仅当对 $x \in S$ 使得 $x \notin I$, $\langle x, f_I\rangle = f_I$.

证　设 I 是 S 的素理想. 则 f_I 是 S 的 Fuzzy 素理想. 对任意 $x \in S$ 使得 $x \notin I$, 则 $f_I(x) = 0 = \inf_{y\in S} f_I(y)$. 由定理 4.6.6, $\langle x, f_I\rangle = f_I$ 成立.

反之, 设 I 是 S 的理想. 显然 $f_I \neq 0$. f_I 是 S 的 Fuzzy 理想. 设 $x \in S$ 使得 $f_I(x)$ 在 $f_I(S)$ 中不是极大的. 因为 $f_I(y) = 0$ 或 $f_I(y) = 1$, $\forall y \in S$, 所以 $f_I(x) = 0$. 否则 $f_I(x) = 1$, 这意味着 $f_I(x)$ 在 $f(S)$ 中的极大性. 矛盾. 因此 $x \notin I$ 由假设 $\langle x, f_I\rangle = f_I$. 因此根据定理 4.6.6, f_I 是 Fuzzy 素的, 从而 I 是素的. 证毕. □

4.6.8 定理　设 S 是可换半群且 f 是 S 的 Fuzzy 子集使得 $\langle x, f\rangle = f, \forall x \in S$. 则 f 是常数.

证　对任意 $x, y \in S$, 由假设 $f(x) = \langle y, f\rangle(x) = f(xy) = \langle x, f\rangle(y) = f(y)$. 因此 f 是常数. □

4.6.9 定理　设 S 是半群 f 是 S 的 Fuzzy 素子集. 则 $\langle x, f\rangle$ 也是 S 的 Fuzzy 素子集, $\forall x \in S$.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 素子集. 显然 $\langle x, f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 子集. 对任意 $x \in S$,

且 $y,z\in S$,

$$\begin{aligned}\langle x,f\rangle(yz) &= f(xyz)=\max\{f(xy),f(z)\}\\ &=\max\{f(x),f(y),f(z)\}=\max\{f(xy),f(xz)\}\\ &=\max\{\langle x,f\rangle(y),\langle x,f\rangle(z)\}.\end{aligned}$$

因此 $\langle x,f\rangle$ 是 Fuzzy 素的. 证毕. □

4.6.10 定理　设 S 是可换半群且 f 是 S 的 Fuzzy 半素理想. 则 $\langle x,f\rangle$ 也是 S 的 Fuzzy 半素理想, $\forall x\in S$.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 半素理想且 $x\in S$. 则由定理 4.6.3, $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 理想. 对任意 $a\in S$, 因为 f 是 Fuzzy 半素的, 所以 $\langle x,f\rangle(a^2):=f(xa^2)\leqslant f((xa)^2)\leqslant f(xa)=\langle x,f\rangle(a)$. 因此 $\langle x,f\rangle$ 是 Fuzzy 半素的. □

4.6.11 推论　设 S 可换半群, $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 S 的非空 Fuzzy 半素理想簇, 且设 $f=\inf\{f_i\mid i\in I\}$. 则对任意 $x\in S$, $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 半素理想.

证　显然 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 设 $x,y\in S$. 因为 f_i $(i\in I)$ 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以

$$\begin{aligned}f(xy) &= \inf\{f_i\mid i\in I\}(xy)=\inf\{f_i(xy)\mid i\in I\}\\ &\geqslant \inf\{\max\{f_i(x),f_i(y)\}\mid i\in I\}\\ &\geqslant \max\{\inf\{f_i(x)\mid i\in I\},\inf\{f_i(y)\mid i\in I\}\}\\ &= \max\{f(x),f(y)\}.\end{aligned}$$

因此 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 设 $a\in S$. 因为 f_i 是 Fuzzy 半素的, $\forall i\in I$, 所以

$$\begin{aligned}f(a) &= \inf\{f_i\mid i\in I\}(a)\\ &=\inf\{f_i(a)\mid i\in I\}\geqslant \inf\{f_i(a^2)\mid i\in I\}\\ &=\inf\{f_i\mid i\in I\}(a^2)=f(a^2).\end{aligned}$$

因此 f 是 Fuzzy 半素的. 由定理 4.6.10, 对任意 $x\in S$, $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 半素理想. 证毕. □

4.6.12 推论　设 S 是可换半群, $\{P_i\}_{i\in I}$ 是 S 的半素理想簇且 $A:=\bigcap\limits_{i\in I}P_i\neq\emptyset$. 则 $\langle x,f_A\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 半素理想, $\forall x\in S$.

证　显然 A 是 S 的半素理想, 当然 f_A 是 S 的 Fuzzy 半素理想. 由定理 4.6.10, $\langle x,f_A\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 半素理想. 证毕. □

4.6.13 推论　设 S 是可换半群, f 是 S 的 Fuzzy 素子集. 如果 f 不是常数, 则 f 不是 S 的极大的 Fuzzy 素子集.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 素子集. 由定理 4.6.9 和假设, 对每个 $x\in S$, $\langle x,f\rangle$ 是 S 的 Fuzzy 素子集. 进一步地, 存在 $x\in S$ 使得 $f\subset\langle x,f\rangle$. 否则 $f=\langle x,f\rangle\forall x\in S$. 由定理 4.6.8, f 是常数. 矛盾. 证毕. □

如果 f 是 S 的 Fuzzy 理想, 用 f_ρ 表示 S 上的一个等价关系, 定义如下:

$$f_\rho\ :\ =\{(x,y)|\langle x,f\rangle=\langle y,f\rangle\}.$$

4.6.14 定理　设 S 是可换半群且 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则下列各款等价:

(1) f_ρ 是 S 的同余;

(2) 如果 f 是 Fuzzy 半素的, 则 f_ρ 是 S 的半格同余.

证　(1) 要证 f_ρ 是 S 上的同余, 我们仅要证 f_ρ 关于 S 的乘法是相容的. 设 $(x,y)\in f_\rho, c\in S$. 则 $(xc,yc)\in f_\rho$. 事实上,

$$\begin{aligned}(\forall z\in S)\ \langle xc,f\rangle(z)&=f(xcz)=\langle x,f\rangle(cz)\\&=\langle y,f\rangle(cz)\ \ (\text{因为 }\langle x,f\rangle=\langle y,f\rangle)\\&=f(ycz)=\langle yc,f\rangle(z).\end{aligned}$$

相似地, $(cx,cy)\in f_\rho$ 成立.

(2) 设 S 是可换半群且 f 是 Fuzzy 半素. 则对任意 $z\in S$,

$$\langle x^2,f\rangle(z)=f(x^2z)\leqslant f((xz)^2)\leqslant f(xz)=\langle x,f\rangle(z).$$

因此 $\langle x^2,f\rangle\subseteq\langle x,f\rangle\Rightarrow\langle x,f\rangle\subseteq\langle x^2,f\rangle$. 故 $\langle x,f\rangle=\langle x^2,f\rangle$, 即 $(x,x^2)\in f_\rho$. 证毕. □

4.6.15 定义　S 的一个 Fuzzy 子集称为 Fuzzy 3- 素 的, 如果对任意 $x_1,x_2,x_3\in S$,

$$\begin{aligned}f(x_1x_2x_3)&=\max\{f(x_1x_2),f(x_1x_3)\}\\&=\max\{f(x_2x_3),f(x_2x_1)\}\\&=\max\{f(x_3x_1),f(x_3x_2)\}.\end{aligned}$$

4.6.16 定理　设 S 是半群且 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 如果 f 是 Fuzzy 素的, 则 f 是 Fuzzy 3- 素的.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 素子集. 则对任意 $x_1,x_2,x_3\in S$,

$$\begin{aligned}f(x_1x_2x_3)&=\max\{f(x_1),f(x_2x_3)\}\\&\leqslant\max\{f(x_1x_2),f(x_2x_3)\}\leqslant f(x_1x_2x_3).\end{aligned}$$

因此 $f(x_1x_2x_3) = \max\{f(x_1x_2), f(x_2x_3)\}$. 因为

$$\begin{aligned} f(x_2x_1x_3) &= \max\{f(x_2x_1), f(x_3)\} \\ &= \max\{f(x_1x_2), f(x_3)\} = f(x_1x_2x_3), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x_1x_2x_3) &= \max\{f(x_1x_2), f(x_3)\} \leqslant \max\{f(x_1x_2), f(x_1x_3)\} \\ &= \max\{f(x_2x_1), f(x_1x_3)\} \leqslant \max\{f(x_2x_1x_3), f(x_2x_1x_3)\} \\ &= f(x_2x_1x_3) = f(x_1x_2x_3). \end{aligned}$$

因此 $f(x_1x_2x_3) = \max\{f(x_2x_1), f(x_1x_3)\}$.

同样地，我们有

$$\begin{aligned} f(x_1x_2x_3) &= \max\{f(x_1), f(x_2x_3)\} \leqslant \max\{f(x_3x_1), f(x_2x_3)\} \\ &= \max\{f(x_1x_3), f(x_2x_3)\} \leqslant \max\{f(x_2x_1x_3), f(x_1x_2x_3)\} \\ &= f(x_1x_2x_3). \end{aligned}$$

因此 $f(x_1x_2x_3) = \max\{f(x_3x_1), f(x_2x_3)\}$. 证毕. □

一般地， Fuzzy 3- 素理想不是 S 的 Fuzzy 素理想，下面给出反例.

4.6.17 例　设 S 是半群其乘法表如下：

·	a	b	c	d
a	b	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

设 f 是 S 的如下定义的 Fuzzy 子集：

$$f(d) = 0.5, f(a) = f(b) = f(c) = 0,$$

则 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 因为 $f(bc) = f(d) = 0.5 \neq \max\{f(b), f(c)\}$, f 不是 Fuzzy 素的. 但是 f 是 Fuzzy 3- 素理想. 事实上，对任意 $x_1, x_2, x_3 \in S$, 我们有

$$x_1x_2x_3 \in \{a^3, a^2b, a^2c, a^2d, b^3, b^2a, b^2c, b^2d, c^3, c^2a, c^2b, c^2d, abc, acd, bcd, abd\}.$$

设 x_1、x_2 和 x_3 有一个是 d. 因为 S 是可换的且 $xd = d$, $\forall x \in S$, 所以

$$\begin{aligned} f(x_1x_2x_3) = f(d) &= \max\{f(x_1x_2), f(x_1x_3)\} \\ &= \max\{f(x_2x_3), f(x_2x_1)\} \\ &= \max\{f(x_3x_1), f(x_3x_2)\}. \end{aligned}$$

进一步地，设 x_1, x_2 和 x_3 都不是 d. 则 $f(x_1x_2x_3)$ 有下列情形:

$$\begin{aligned}
f(a^3) &= f(b) = \max\{f(a^2), f(a^2)\};\\
f(a^2b) &= f(b) = \max\{f(a^2), f(ab)\} = \max\{f(ab), f(ab)\};\\
f(a^2c) &= f(d) = \max\{f(a^2), f(ac)\} = \max\{f(ac), f(ac)\};\\
f(b^3) &= f(b) = \max\{f(b^2), f(b^2)\};\\
f(b^2a) &= f(b) = \max\{f(b^2), f(ab)\} = \max\{f(ab), f(ab)\};\\
f(b^2c) &= f(d) = \max\{f(b^2), f(cb)\} = \max\{f(cb), f(cb)\};\\
f(c^3) &= f(c) = \max\{f(c^2), f(c^2)\};\\
f(c^2a) &= f(d) = \max\{f(c^2), f(ac)\} = \max\{f(ac), f(ac)\};\\
f(c^2b) &= f(d) = \max\{f(c^2), f(ac)\} = \max\{f(cb), f(cb)\};\\
f(abc) &= f(d) = \max\{f(ab), f(ac)\} = \max\{f(ab), f(cb)\}\\
&= \max\{f(ac), f(cb)\}.
\end{aligned}$$

4.6.18 定理　设 S 是半群且 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 如果 f 是 Fuzzy 3- 素的，则 f 任意扩张都是 Fuzzy 素的. 特别地，如果 S 可换，则 f 是 Fuzzy 3- 素的当且仅当 f 的任意扩张是 Fuzzy 素的.

证　设 f 是 Fuzzy 3- 素的. 则对任意 $x, y, z \in S$,

$$\begin{aligned}
\langle x, f\rangle(yz) &= f(xyz) = \max\{f(xy), f(xz)\}\\
&= \max\{\langle x, f\rangle(y), \langle x, f\rangle(z)\}.
\end{aligned}$$

因此 f 是 Fuzzy 素的. 反之，设 S 是可换半群且 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 则由假设 f 的任何扩张是 S 的 Fuzzy 素子集. 因此

$$\begin{aligned}
(\forall x, y, z \in S)\ f(xyz) &= \langle x, f\rangle(yz) = \max\{f(xy), f(xz)\}\\
&= \langle y, f\rangle(xz) = \max\{f(yx), f(zy)\}\\
&= \langle z, f\rangle(xy) = \max\{f(zx), f(zy)\}.
\end{aligned}$$

故 f 是 Fuzzy 3- 素的. 证毕. □

4.6.19 推论　设 S 是带有单位元 e 的幺半群，f 是 S 的 Fuzzy 子集. 如果 f 是 Fuzzy 3- 素的，则 f 是 Fuzzy 素的.

证　设 e 是 S 的单位元. 则 $\langle e, f\rangle = f$. 因为 f 是 Fuzzy 3- 素的，由定理 4.6.18, $\langle e, f\rangle$ 是 Fuzzy 素的，因此 f 也是 Fuzzy 素的. 证毕. □

根据定理 4.6.16 和推论 4.6.19 我们看出对幺半群而言，Fuzzy 素和 Fuzzy 3- 素是一致的.

4.6.20 定理 如果 S 是半群且 f 是 S 的 Fuzzy 半素理想,则 $f = \inf\{\langle x, f\rangle \mid x \in S\}$.

证 设 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 $f \subseteq \langle x, f\rangle \forall x \in S$. 设 g 是 S 的 Fuzzy 子集使得 $g \subseteq \langle x, f\rangle \forall x \in S$, 且设 $y \in S$. 因为 f 是 Fuzzy 半素的, 所以 $g(y) \leqslant \langle y, f\rangle(y) := f(y^2) \leqslant f(y)$. 因此 $g \subseteq f$. 证毕. □

4.6.21 推论 设 S 是半群且 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 如果 f 是 Fuzzy 3- 素且是 Fuzzy 素的, 则 f 是 S 的所有包含 f 的 Fuzzy 素理想的交.

证 根据定理 4.6.18 和定理 4.6.20 得出. □

如果 S 是半格, 则 S 的任意 Fuzzy 子集均是 Fuzzy 半素的, 因此我们有

4.6.22 推论 设 S 是半格. 则任何 Fuzzy 3- 素理想 f 是 S 的所有包含 f 的 Fuzzy 素理想的交.

上述推论如果没有假设 f 是 Fuzzy 半素的, 一般情况下结论是不对的, 我们有反例.

4.6.23 例 设 S 是半群, 它的乘法定义如下:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	d

设 f 是 S 的 Fuzzy 子集, 定义如下:

$$f(a) = 0.5, f(b) = f(c) = f(d) = 0.$$

则 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 我们如同上例一样可以证明 f 是 Fuzzy 3- 素的. 但是 f 不是 Fuzzy 半素的. 因为 $f(b^2) = f(a) = 0.5 > f(b)$.

设 $\mathcal{A}$ 是 S 的所有包含 f 的 Fuzzy 子集全体. 首先 $\mathcal{A}$ 不是空集. 对每个 $g \in \mathcal{A}$, $g(b) \geqslant 0.5$. 事实上, 设 $g \in \mathcal{A}$. 因为 $a = b^2$, 所以 $0.5 = f(a) \leqslant g(a) = g(b^2) = \max\{g(b), g(b)\} = g(b)$. 因此

$$\left(\bigcap\{h \mid h \in \mathcal{A}\}\right)(b) := \inf\{h(b) \mid h \in \mathcal{A}\} \geqslant 0.5.$$

因为 $f(b) := 0$, 所以 $(\bigcap\{h \mid h \in \mathcal{A}\})(b) \neq f(b)$. 因此 $f \neq \bigcap\{h \mid h \in \mathcal{A}\}$.

4.7 Fuzzy 理想扩张性质

本节我们引入 Fuzzy 理想扩张性质, 强 Fuzzy 理想扩张性质和 Fuzzy 主理想

扩张性质. 讨论这三种扩张性质之间的关系和性质. 假设 S 有零元 0, f 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 $f(0) \geqslant f(x)\ \forall x \in S$. 本节我们不妨规定 $f(0) = 1$

4.7.1 定义　假设 g 和 f 是 S 的 Fuzzy 子集. g 称为 f 的 Fuzzy 理想, 如果 $g \subseteq f$ 且

$$(\forall x, y \in S)\ g(xy) \geqslant g(x) \wedge f(y),\quad g(xy) \geqslant f(x) \wedge g(y).$$

假设 $T \subseteq S$. 在上定义中, 如果 $f = f_T$, g 称为 T 的 Fuzzy 理想.

根据 Fuzzy 理想的相关结论, 我们有下列定理.

4.7.2 定理　设 T 是半群 S 的子半群. 则 I 是 T 的理想当且仅当 f_I 是 T 的 Fuzzy 理想.

4.7.3 定理　设 g 和 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 则 g 是 f 的 Fuzzy 理想当且仅当对任意 $t \in (0,1]$, 如果 $g_t \neq \emptyset$, 则 g_t 是 f_t 的理想.

4.7.4 定理　设 g 和 f 是 S 的 Fuzzy 子集. 则 g 是 f 的 Fuzzy 理想当且仅当 $g \circ f \subseteq g$, $f \circ g \subseteq g$.

4.7.5 定义　一个半群 S 称具有 *Fuzzy 理想扩张性质* (简称 FIEP), 如果对 S 的每个 Fuzzy 子半群 f 和 f 的每个 Fuzzy 理想 μ, 存在 S 的一个 Fuzzy 理想 ν 使得 $\nu \cap f = \mu$. 特别地, 如果对 S 的每个子半群 T 和 T 的 Fuzzy 理想 μ, 存在 S 的 Fuzzy 理想 ν 使得 $\nu \cap 1_T = \mu$. 则 S 称为具有 *强 Fuzzy 理想扩张性质*.

下面的例子试图说明并不是每个半群都具有 FIEP.

4.7.6 例　设 $S = (\mathbf{N}, +)$ 是自然数加法半群. 定义 S 的 Fuzzy 子集如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, & x \in \mathbf{N}\backslash\{1\}, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, & x \in \mathbf{N}\backslash\{1,3\}, \\ 0, & x = 1, 3. \end{cases}$$

则可以验证 f 是 S 的 Fuzzy 子半群, μ 是 f 的 Fuzzy 理想. 假设存在 S 的一个 Fuzzy 理想 ν 使得 $\nu \cap f = \mu$. 则 $\dfrac{1}{2} = \mu(2) = \nu(2) \wedge \dfrac{1}{2}$, 因此 $\nu(2) \geqslant \dfrac{1}{2}$. 因为 ν 是 S 的 Fuzzy 理想, 所以 $\nu(3) = \nu(2+1) \geqslant \nu(2) \geqslant \dfrac{1}{2}$, 这意味着 $\mu(3) = \nu(3) \wedge f(3) > 0$. 矛盾.

4.7.7 定理　一个半群 S 有 FIEP 当且仅当 S 的每个子半群 T 也有 FIEP.

证　设 T 是 S 的子半群. 作为一个半群 T, 设 f 是 T 的 Fuzzy 子集且 ν 是 f 的 Fuzzy 理想. 定义

$$\nu^*(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \in T, \\ 0, & x \notin T, \end{cases}$$

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & x\in T,\\ 0, & x\notin T.\end{cases}$$

则 f^* 是 S 的 Fuzzy 子集且 ν^* 是 f^* 的 Fuzzy 理想. 由假设, 存在一个 S 的 Fuzzy 理想 μ 使得 $\mu\cap f^*=\nu^*$. 因此 $\mu|_T\cap f=\nu$, 这里 $\mu|_T$ 是 μ 在 T 上的限制. 显然它是 T 的 Fuzzy 理想. 因此我们证明了 T 有 FIEP. 反之是显然的. 证毕. □

4.7.8 定理　一个半群 S 有 FIEP 当且仅当它的每个同态像有 FIEP.

证　设 ϕ 是 S 到 S^* 的满同态映射. 如果 f^* 是 S^* 的子半群且 μ^* 是 f^* 的 Fuzzy 理想. 设 $\nu=\phi^{-1}(\nu^*), f=\phi^{-1}(f^*)$. 则 f 是 S 的 Fuzzy 子半群且容易看出 ν 是 f 的 Fuzzy 理想. 因为 S 有 FIEP, 所以存在 S 一个 Fuzzy 理想 μ 使得 $\mu\cap f=\nu$. 设 $\mu^*=\phi(\mu)$. 则 μ^* 是 S^* 的 Fuzzy 理想. 根据定理 1.1.13, 我们有事实

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\mu^*\cap f^*)&=\phi^{-1}(\mu^*)\cap\phi^{-1}(f^*)\\ &=\mu\cap f=\nu=\phi^{-1}(\mu^*).\end{aligned}$$

再根据定理 1.1.13, $\mu^*\cap f^*=\phi\phi^{-1}(\mu^*\cap f^*)=\phi\phi^{-1}(\mu^*)=\mu^*$. 证毕. □

4.7.9 注　设 $f\in F(S)$. 如果 x_λ 是 S 的 Fuzzy 点且 $x_\lambda\in f$. 则由 x_λ 生成的 f 的 Fuzzy 理想, 记 $(x_\lambda)_f$ 称为 f 的 Fuzzy 主理想. 显然 $(x_\lambda)_f=x_\lambda\cup f\circ x_\lambda\cup x_\lambda\circ f\cup f\circ x_\lambda\circ f$. 因此对任意 $z\in S$,

$$\begin{aligned}(x_\lambda)_f(z)&=x_\lambda(z)\vee\left(\sup_{z=yw}(f(y)\wedge x_\lambda(w))\right)\\ &\quad\vee\left(\sup_{z=yw}(f(w)\wedge x_\lambda(y))\right)\vee\left(\sup_{z=ywr}(f(y)\wedge x_\lambda(w)\wedge f(r))\right)\\ &=x_\lambda(z)\vee\left(\sup_{z=yx}(f(y)\wedge x_\lambda(x))\right)\\ &\quad\vee\left(\sup_{z=yx}(f(y)\wedge x_\lambda(x))\right)\vee\left(\sup_{z=yxr}(f(y)\wedge x_\lambda(x)\wedge f(r))\right)\end{aligned}$$

表为 a_z.

这样

$$(\forall z\in S)\ \ (x_\lambda)_f(z)=\begin{cases} a_z\ (0<a_z\leqslant\lambda), & z\in(x)_{\mathrm{supp}f},\\ 0, & z\notin(x)_{\mathrm{supp}f},\end{cases}$$

这里 $(x)_{\mathrm{supp}f}$ 是 $\mathrm{supp}f$ 的由 x 生成的主理想.

特别地, 如果 $f=S$, 那么 $(x_\lambda)_f$ 称为 S 的 Fuzzy 主理想, 记为 $(x_\lambda)_S$, 且

4.7.10 定理　设 $f-x_\lambda\in F(S)$. 则 f 在 S 中生成的 Fuzzy 理想 $(f)_S$ 是

$$(\forall y\in S)\ (f)(y)=\begin{cases}\lambda, & y\in(x),\\ 0, & y\notin(x).\end{cases}$$

这里 (x) 是 x 生成的主理想.

4.7.11 定义　一个半群 S 称为有 Fuzzy 主理想扩张性质 (简称 FPIEP), 如果对 S 的每个 Fuzzy 子半群 f 的每个 Fuzzy 主理想 μ, 存在一个 S 的 Fuzzy 主理想 ν 使得 $\nu \cap f = \mu$.

4.7.12 定理　设 S 是半群. 则 S 有 FIEP 当且仅当 S 有 FPIEP.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群, $(x_\lambda)_f$ 是 f 的 Fuzzy 主理想. 由假设存在 S 的一个 Fuzzy 理想 μ 使得 $\mu \cap f = (x_\lambda)_f$. 因为 $x_\lambda \in \mu$, 所以 $(x_\lambda)_S \cap f \subseteq \mu \cap f = (x_\lambda)_f$. 显然 $(x_\lambda)_f \subseteq (x_\lambda)_S \cap f$. 因此 $(x_\lambda)_f = (x_\lambda)_S \cap f$.

反之, 设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群且 μ 是 f 的 Fuzzy 理想. 则 $\mu = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} x_{\mu(x)} = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} (x_{\mu(x)})_f$. 设 $\nu = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} (x_{\mu(x)})_S$. 则 ν 是 S 的 Fuzzy 理想. 对任意 $x_{\mu(x)}$ $(x \in \mathrm{supp} f,)$ 因为 S 有 FPIEP, 所以存在 S 的一个 Fuzzy 主理想 $(y_\lambda)_S$ 使得 $(y_\lambda)_S \cap f = (x_{\mu(x)})_f$. 因为 $(x_{\mu(x)})_f(x) = \mu(x)$, 且 $\mu(x) \leqslant f(x)$. 所以 $y = x, \lambda = \mu(x)$. 故

$$\nu \cap f = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} ((x_{\mu(x)})_S \cap f) = \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\mu} (x_{\mu(x)})_f = \mu.$$

证毕. □

4.7.13 定义　一个半群 S 称为 Fuzzy t- 半群, 如果 f 是 S 的 Fuzzy 理想且 g 是 f 的 Fuzzy 理想. 则 g 是 S 的 Fuzzy 理想.

我们知道, 如果 S 是 Fuzzy t- 半群, 则 S 是 t- 半群.

4.7.14 定理　每个有 FIEP 的半群是 Fuzzy t- 半群.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 理想且 g 是 f 的 Fuzzy 理想. 由假设存在一个 S 的 Fuzzy 理想 h 使得 $h \cap f = g$. 显然 g 是 S 的 Fuzzy 理想. 证毕. □

4.7.15 例　设 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 定义 S 上的乘法表如下:

·	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	3
3	1	2	3	1	1
4	1	1	1	4	5
5	1	4	5	1	1

则 $(S, \cdot)$ 是半群且 S 的所有理想是 $\{1\}$ 和 S. 设 μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 $\mu =$

$\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda\mu_\lambda$. 因为 μ_λ 是 S 的 Fuzzy 理想. 所以 $\mu_\lambda=S$, 且 $\mu_\lambda=\{1\}$. 故

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ b, & x\neq 1,\end{cases}$$

这里 $b\geqslant 0$. 设 ν 是 μ 的 Fuzzy 理想. 由定理 4.7.8, 对任意 $\lambda\in(0.1]$, $\nu_\lambda\subseteq\mu_\lambda$ 且 ν_λ 是 μ_λ 的理想. 因此 ν_λ 是 S 或 $\{1\}$. 因为 $\nu=\bigcup\limits_{\lambda\in(0.1]}\lambda\nu_\lambda$. 所以

$$\nu(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ d, & x\neq 1,\end{cases}$$

这里 $b\geqslant d\geqslant 0$. 因此 ν 也是 S 的 Fuzzy 理想. 由此推出 S 是 Fuzzy t- 半群. 但是 S 没有 FIEP. 事实上, 设

$$f(1)=\frac{5}{6},\ f(2)=\frac{4}{5},\ f(3)=\frac{3}{4},\ f(4)=\frac{2}{3},\ f(5)=0.$$
$$g(1)=\frac{3}{4},\ g(2)=\frac{2}{3},\ g(3)=\frac{1}{2},\ g(4)=g(5)=0.$$

则 f 是 S 的 Fuzzy 子半群且 g 是 f 的 Fuzzy 理想. 对任意 S 的 Fuzzy 理想 μ, 显然 $\mu\cap f\neq g$.

4.8 评 述

如同半群的理想在半群理论研究中的作用一样, 半群的 Fuzzy 理想对刻画半群的结构和半群性质的描述起到至关重要的作用. 在下一节中我们将看到各类 Fuzzy 理想对半群结构的影响. 本节综合了多位学者的思想, 给出了半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 在 S 中生成 Fuzzy 左 (右) 理想, 在这个问题的探讨过程中我们先考虑的 Fuzzy 点生成 Fuzzy 理想 [106]. 进一步地, 设为有单位元的半群, 1995 年, Mo 和 Wang[65] 得出由 Fuzzy 子集 f 生成的 Fuzzy 左 (右) 理想、 Fuzzy 内理想、 Fuzzy 双理想的描述. 在半群 S 有单位元的情况下, 1999 年, Xie[118] 从另一个角度给出了 S 的一个 Fuzzy 子集 f 的生成 Fuzzy 理想等问题, 推广了 Mo 和 Wang 的结果.

2002 年, Xie[123] 引入了半群 S 的 Fuzzy 理想扩张性质 FIEP, 强 Fuzzy 理想扩张性质 SFIEP, 证明 S 有 FIEP 当且仅当 S 的每个同态像有 FIEP 性质, 该文给出了带有 SFIEP 性质的循环半群的刻画. 1992 年, Mclean 和 Kummer[39] 注意到了 S 的 Fuzzy 理想与 S 的 Green 关系之间的联系, 同时关注到 S 的任一模糊理想是 S 的理想的特征函数的适当线性组合逼近而得出. 从而可进一步讨论 S 的所有 Fuzzy 理想所诱导的拓扑及其拓扑性质.

继 Liu[45] 之后, 有很多数学家在环 R 中引入和研究模糊素理想, 证明 R 的一个 Fuzzy 理想是 Fuzzy 素的当且仅当 $\mathrm{Im} f = \{1, \beta\}, \beta \in (0,1)$ 且 $f_1 = \{x \in R \quad f(x) = 1\}$ 是素的. 设 S 为半群, 我们给出各种 Fuzzy 素理想的刻画. 我们注意到在讨论半群 S 的 Fuzzy 素理想时, 我们不大用到 S 的结合律, 所以 Kehayopulu, Xie 和 Tsinglis[29] 将 Fuzzy 素理想的讨论进一步推广到群胚中去就是很自然的了. 除了以上一些特殊的 Fuzzy 理想外, 岑嘉评、陈得刚和吴从炘 [89] 定义了 Fuzzy 拟对称理想讨论了它们的根, 关于 Fuzzy 理想的根的讨论我们在文献 [19] 还能见到, 这给我们今后的研究开辟了一个新的方向.

第5章 正则半群

本章我们用 Fuzzy 数学方法和 Fuzzy 理想系统研究正则半群、完全正则半群、拟正则半群、内禀正则半群等.

5.1 正则半群

一个可换的幂等的半群称为 *半格*. 设 S 是一个半群, Y 为半格. 设 φ 为 S 到 Y 的满同态, 则每个子集 $\alpha\varphi^{-1}=\{a\in S\mid\varphi(a)=\alpha\}$ 是 S 的子半群. 现记 $S_\alpha=\alpha\varphi^{-1}$. 则 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$, 且 $S_\alpha\cap S_\beta=\emptyset,\alpha,\beta\in Y,\alpha\neq\beta$. 进一步地, $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha\beta}$, 这里 $\alpha\beta$ 是 α 和 β 在 Y 中的积. 通过以上分析, 我们可以得出: 一个半群 S 称为是型 *T-半群的半格*, 如果存在一个半群簇 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in Y}$, Y 是半格, 且每个 S_α 是型 T- 半群, S 是所有 S_α 的无交并, $S_\alpha S_\beta$ 和 $S_\beta S_\alpha$ 均包含在 S 的同一个子半群 $S_k,k\in Y$ 中. 相似地, 我们可以定义型 *T-群半格*, 型 *T-半群带* 等.

5.1.1 定义 设 A 为 S 非空子集, A 称为 *广义双理想* 如果 $ASA\subseteq A$.

5.1.2 定理 正则半群的广义 Fuzzy 双理想是 Fuzzy 双理想.

证 设 f 是半群 S 的广义 Fuzzy 双理想, $a,b\in S$. 因为 S 是正则的, 所以存在 x 使得 $bxb=b$, $f(ab)=f(a(bxb))=f(a(bx)b)\geqslant\min(f(a),f(b))$. 这意味着 f 是 Fuzzy 子半群. 因此 f 是 Fuzzy 双理想. 证毕. □

下面引理见文献 [27], [59], [60], [64]

5.1.3 引理 (Lajos 引理) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 设 A 为 S 的广义双理想, L 为 S 的左理想, $A\cap L\subseteq AL$;

(3) 设 A 为 S 的广义双理想, L 为 S 的左理想, R 为 S 的右理想, $R\cap A\cap L\subseteq RAL$.

5.1.4 引理 (Lajos 引理) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 设 B 为 S 的双理想, $B=BSB$.

5.1.5 引理 (Lajos 引理) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 对 S 的每个双理想 B 和理想 J, $BJB=B\cap J$.

5.1.6 引理 (Iseki 引理) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 对 S 的每个左理想 L 和每个右理想 R, $RL = R \cap L$.

下面我们通过 Fuzzy 对象给出正则半群的刻画.

5.1.7 定理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想, $f = f \circ S \circ f$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 为 S 的 Fuzzy 双理想, $a \in S$. 因为 S 是正则的, 存在 $x \in S$ 使得 $a = axa$. 因此

$$\begin{aligned}(f \circ S \circ f)(a) &= \sup_{a=yz}[\min\{(f \circ S)(y), f(z)\}] \\ &\geqslant \min\{(f \circ S)(ax), f(a)\} \\ &\geqslant \min\{\sup_{ax=pq}[\min\{f(p), S(q)\}], f(a)\} \\ &\geqslant \min\{\min\{f(a), S(x)\}, f(a)\} \\ &\geqslant \min\{\min\{f(a), 1\}, f(a)\} = f(a).\end{aligned}$$

从而 $f \circ S \circ f \supseteq f$. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 双理想, 根据引理 2.2.1, $f \subseteq f \circ S \circ f$. 故 $f = f \circ S \circ f$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 A 为 S 的双理想, $a \in A$. 则

$$\begin{aligned}&\sup_{a=yz}[\min\{(f_A \circ S)(y), f_A(z)\}] \\ =\ &[(f_A \circ S) \circ f_A](a) = f_A(a) = 1.\end{aligned}$$

这意味着存在 $b, c \in S$ 使得 $a = bc$, $(f_A \circ S)(b) - f_A(c) - 1$. 因此

$$\sup_{b=pq}[\min\{f_A(p), S(q)\}] = (f_A \circ S)(b) = 1.$$

这意味着存在 $d, e \in S$ 使得 $b = de$, $f_A(d) = S(e) = 1$. 因此 $d, c \in A, e \in S$. 从而 $a = bc = (de)c \in ASA$. 因为 A 是 S 的双理想, 反包含关系当然成立, 故 $A = ASA$. 由引理 5.1.4, S 是正则的. 证毕. □

5.1.8 练习　一个半群是正则半群当且仅当对 S 的每个广义 Fuzzy 双理想 f, $f = f \circ S \circ f$.

5.1.9 定理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则的;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f 和 Fuzzy 理想 g, $f \circ g \circ f - f \cap g$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 和 g 分别是 S 的 Fuzzy 双理想和 Fuzzy 理想. 则 $f \circ g \circ f \subseteq f \circ S \circ f \subseteq f$, $f \circ g \circ f \subseteq S \circ g \circ S \subseteq g \circ S \subseteq g$. 因此 $f \circ g \circ f \subseteq f \cap g$. 为了证

明逆包含关系，取 $a \in S$. 因为是 S 正则的，所以存在 x 元素使得 $a = axa = (axaxa)$. 又 g 为 S 的 Fuzzy 理想， $g(xax) \geqslant g(ax) \geqslant g(a)$. 因此

$$\begin{aligned}
f \circ g \circ f(a) &= \sup_{zy=a}[\min(f(y), (g \circ f)(z))] \\
&\geqslant \min\{f(a), (g \circ f)(xaxa)\} \\
&\geqslant \min\{f(a), \sup_{xaxa=pq}[\min\{g(p), f(q)\}]\} \\
&\geqslant \min\{f(a), \min\{g(xax), f(a)\}\} \\
&\geqslant \min\{f(a), \min\{g(a), f(a)\}\} = \min\{f(a), g(a)\} = (f \cap g)(a).
\end{aligned}$$

故 $f \cap g \supseteq f \circ g$. 从而， $f \cap g = f \circ g$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 (2) 成立，设 R 为 S 的右理想， L 为 S 的左理想. 为了证明 $R \cap L \subseteq RL$. 设 $a \in R \cap L$. 则 $f_R(a) = f_L(a) = 1$. 因为 f_L 和 f_R 分别为 S 的 Fuzzy 左理想和 Fuzzy 右理想. 因此 $f_R \cap f_L = f_R \circ f_L$. 则

$$\begin{aligned}
\sup_{a=yz}(\min(f_R(y), f_L(z)) &= (f_R \circ f_L)(a) = (f_R \cap f_L)(a) \\
&= \min(f_R(a), f_L(a)) = 1.
\end{aligned}$$

这意味着存在 $b, c \in S$ 使得 $a = bc$, $f_R(b) = f_L(c) = 1$. 因此 $a = bc \in RL$, 即 $R \cap L \subseteq RL$. 由引理 5.1.6, S 是正则的. 证毕. □

5.1.10 练习 问：将上定理 (2) 中的 Fuzzy 双理想换为 Fuzzy 广义双理想，上定理还成立吗？

5.1.11 定理 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f 和 Fuzzy 右理想 g, $f \circ g = f \cap g$.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 和 g 分别是 S 的 Fuzzy 右理想和 Fuzzy 左理想. 则 $f \circ g \subseteq f \circ S \subseteq f$, $f \circ g \subseteq S \circ g \subseteq g$. 因此 $f \circ g \subseteq f \cap g$. 为了证明逆包含关系，取 $a \in S$. 因为是 S 正则的，所以存在 x 元素使得 $a = axa$. 因此

$$\begin{aligned}
f \circ g(a) &= \sup_{zy=a}[\min(f(y), g(z))] \\
&\geqslant \min\{f(ax), g(a)\} \\
&\geqslant \min\{f(a), g(a)\} = (f \cap g)(a).
\end{aligned}$$

故 $f \cap g \subseteq f \circ g$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 由假设因为 S 本身是 S 的 Fuzzy 理想，所以 $f = f \cap S = f \circ S \circ f$. 由定理 5.1.7, S 是正则的. □

5.1.12 定理 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是正则的;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f 和每个 Fuzzy 左理想 g, $f\cap g\subseteq f\circ g$;

(3) 对 S 的每个 Fuzzy 广义双理想 f 和每个 Fuzzy 左理想 g, $f\cap g\subseteq f\circ g$;

(4) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f 和每个 Fuzzy 左理想 g, 每个 Fuzzy 右理想 h, $h\cap f\cap g\subseteq h\circ f\circ g$;

(5) 对 S 的每个 Fuzzy 广义双理想 f 和每个 Fuzzy 左理想 g, 每个 Fuzzy 右理想 h, $h\cap f\cap g\subseteq h\circ f\circ g$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 和 g 分别是 S 的 Fuzzy 双理想和 Fuzzy 左理想, $a\in S$. 因为是 S 正则的, 所以存在 x 元素使得 $a=axa$. 因此

$$\begin{aligned}f\circ g(a) &= \sup_{xy=a}\min(f(y),g(z))\\ &\geqslant \min(f(a),g(xa))\geqslant\min(f(a),g(a))\\ &=(f\cap g)(a).\end{aligned}$$

故 $f\cap g\subseteq f\circ g$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 假设 A 和 L 分别为 S 的广义双理想和左理想, $a\in A\cap L$. 我们知道 f_A 是 S 的 Fuzzy 广义双理想, f_L 是 S 的左理想. 由假设 $f_A\cap g_L\subseteq f_A\circ g_L$, 因此, $(f_A\circ g_L)(a)\geqslant(f_A\cap g_L)(a)=\min(f_A(a),g_L(a))=1$. 当然 $(f_A\circ g_L)(a)\neq 0$. 我们有 $\sup_{a=yz}(\min(f_A(y),g_L(z))=(f_A\circ g_L)(a)=1$. 这意味着存在 $b,c\in S,a=bc$ 使得 $f_A(b)=g_L(c)=1$. 因此 $a=bc\in AL$. 故 $A\cap L\subseteq A\circ L$. 由引理 5.1.3, S 是正则的.

(1) $\Longrightarrow$ (4). 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f 和每个 Fuzzy 左理想 g, 每个 Fuzzy 右理想 h, $a\in S$, 因为 S 是正则的, 存在 $x\in S$ 使得 $a=axa$. 因此

$$\begin{aligned}(h\circ f\circ g)(a) &= \sup_{a=yz}(\min(h(y),(f\circ g)(z))\\ &\geqslant \min(h(ax),(f\circ g)(a))\\ &\geqslant \min(h(a),\sup_{a=pq}(\min(f(p),g(q))))\\ &\geqslant \min(h(a),\min(f(a),g(xa)))\\ &\geqslant \min(h(a),\min(f(a),g(a)))\\ &\geqslant (h\cap f\cap g)(a).\end{aligned}$$

故 $h\circ f\circ g\supseteq h\cap f\cap g$.

(4) $\Longrightarrow$ (5). 显然.

(5) $\Longrightarrow$ (1). 设 (5) 成立, 设 A 为 S 的广义双理想, L 为 S 的左理想, R 为 S 的右理想. $a\in R\cap A\cap L$. 则 f_A,f_L 和 f_R 分别为 S 的 Fuzzy 广义双理想, Fuzzy

左理想和 Fuzzy 右理想. 因此 $f_R \cap f_A \cap f_L \subseteq f_R \circ f_A \circ f_L$. 则

$$\begin{aligned}(f_R \cap f_A \cap f_L)(a) &\leqslant f_R \circ f_A \circ f_L(a) \\ &= \min(f_R(a), f_A(a), f_L(a)) = 1.\end{aligned}$$

因此, $(f_R \cap f_A \cap f_L)(a) \neq 0$. 且 $\sup_{a=yz}(\min(f_R \circ f_A)(y), f_L(z)) = ((f_R \circ f_A) \circ f_L)(a) = 1$. 这意味着存在 $b, c \in S$ 使得 $a = bc$, $f_R \circ f_A(b) = 1, f_L(c) = 1$. 因此, $(f_R \cap f_A)(b) \neq 0$. 且 $\sup_{b=pq}(\min(f_R(p), f_A(q)) = (f_R \circ f_A)(b) = 1$. 这意味着存在 $d, e \in S$ 使得 $b = de$, $f_R(d) = 1, f_A(e) = 1$. 因此 $a = bc = (de)c \in RAL$, 即 $R \cap A \cap L \subseteq RAL$. 由引理 5.1.3, S 是正则的. 证毕. □

5.1.13 定理 设 S 为正则半群, f 为 S 的 Fuzzy 子集. 下列各款等价:

(1) f 为 S 的 Fuzzy 双理想.

(2) f 可以表为 $f = g \circ h$, 其中 h 为 S 的 Fuzzy 左理想, g 为 S 的 Fuzzy 右理想.

证 假设 (1) 成立, 由 S 是正则的, 根据定理 5.1.7, $f = f \circ S \circ f$. 因此

$$\begin{aligned}f &= f \circ S \circ f = f \circ S \circ (f \circ S \circ f) \\ &= [f \circ (S \circ f)] \circ (S \circ f) \subseteq (f \circ S) \circ (S \circ f) \\ &= f \circ (S \circ S) \circ f \subseteq f \circ S \circ f \subseteq f.\end{aligned}$$

从而, $f = (f \circ S) \circ (S \circ f)$. 另一方面, $(f \circ S) \circ S = f \circ (S \circ S) \subseteq f \circ S$. 因此 $f \circ S$ 是 S 的 Fuzzy 右理想. 相似地, 我们可以证明 $S \circ f$ 是 S 的 Fuzzy 左理想.

反之, 假设 (2) 成立, 即 f 可以表为 $f = g \circ h$, 其中 h 为 S 的 Fuzzy 左理想, g 为 S 的 Fuzzy 右理想. 因为 S 的每个 Fuzzy 右理想 (Fuzzy 左理想) 均为 S 的 Fuzzy 双理想, 由定理 2.2.1, $g \circ h$ 也为 S 的 Fuzzy 双理想. 证毕. □

5.2 内禀正则半群

本节我们以 Fuzzy 左理想, Fuzzy 右理想, Fuzzy 双理想等为工具刻画内禀正则半群.

5.2.1 定义 一个半群 S 称为*内禀正则的*, 如果 $(\forall a \in S)\ (\exists x, y \in S)\ a = xa^2y$. 等价地, $a \in Sa^2S$.

我们知道, 一个半群 S 是内禀正则的当且仅当它是单半群的半格 [79].

5.2.2 引理 (Lajos[64]) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是内禀正则的;

(2) 对 S 的每个左理想 L 和每个右理想 R, $R \cap L \subseteq LR$.

5.2.3 引理 (Lajos[64]) 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则和内禀正则的；

(2) 对 S 的每个双理想 B, $B^2 = B$;

(3) 对 S 的任意双理想 A, B, $A \cap B \subseteq A \circ B$;

(4) 对 S 的每个左理想 L 和每个双理想 B, $B \cap L \subseteq LB \cap BL$;

(5) 对 S 的每个双理想 B 和每个右理想 R, $R \cap B \subseteq BR \cap RB$;

(6) 对 S 的每个左理想 L 和每个右理想 R, $R \cap L \subseteq LR \cap RL$.

5.2.4 定理　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是内禀正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 理想 f, $f(a) = f(a^2), \forall a \in S$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 f 是 S 的 Fuzzy 理想，$a \in S$. 因为 S 是内禀正则的，因此存在 $x, y \in S$ 使得 $a = xa^2y$. 则

$$f(a) = f(xa^2y) \geqslant f(a^2y) \geqslant f(a^2) \geqslant f(a).$$

因此 $f(a) = f(a^2)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 (a^2) 为 a^2 生成的理想，则 $f_{(a^2)}$ 为 S 的 Fuzzy 理想. 由假设，$f_{(a^2)}(a) = f_{(a^2)}(a^2) = 1$. 所以 $a \in (a^2) = \{a^2\} \cup Sa^2 \cup a^2S \cup Sa^2S$. 由此可以推出 $a \in Sa^2S$. 故 S 是内禀正则的. 证毕. □

5.2.5 定理　假设 S 是内禀正则的. 则对 S 的每个 Fuzzy 理想 f, $f(ab) = f(ba), \forall a, b \in S$.

证　设 S 是内禀正则半群，$a, b \in S$. 则由定理 5.3.4,

$$\begin{aligned} f(ab) &= f((ab)^2) = f(a(ba)b) \geqslant f(ba) \\ &= f((ba)^2) = f(b(ab)a) \geqslant f(ab). \end{aligned}$$

因此 $f(ab) = f(ba)$. 证毕. □

5.2.6 定理　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是内禀正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 右理想 f, $f \cap g \subseteq g \circ f$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 假设 f 是 S 的 Fuzzy 右理想，假设 g 是 S 的 Fuzzy 左理想，$a \in S$. 因为 S 是内禀正则的，因此存在 $x, y \in S$ 使得 $a = xa^2y$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a) &= \sup_{a=bc} [\min\{g(b), f(c)\}] \\ &\geqslant \min\{g(xa), f(ay)\} \geqslant \min\{g(a), f(a)\} \\ &= (f \cap g)(a). \end{aligned}$$

故 $f \cap g \subseteq f \circ g$ 成立.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 R 和 L 分别为 S 的右理想和左理想. $a \in L \cap R$. 因为 f_L 和 f_R 分别为 S 的 Fuzzy 左理想和 Fuzzy 右理想. 由假设,

$$\begin{aligned} &\sup_{a=pq}[\min\{f(p), f_R(q)\}] \\ =& (f_L \circ f_R)(a) \geqslant (f_L \cap f_R)(a) \\ =& \min\{f_L(a), f_R(a)\} = 1. \end{aligned}$$

这意味着存在 $b, c \in S$ 使得 $f_L(b) = f_R(c) = 1, a = bc$. 因此 $a = bc \in LR$. 由 a 的任意性, $R \cap L \subseteq LR$. 根据引理 5.2.2, S 是内禀正则的. 证毕. □

5.2.7 定理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是正则和内禀正则的;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f, $f^2 = f$;

(3) 对 S 的任意 Fuzzy 双理想 f, g, $f \cap g \subseteq (f \circ g) \cap (g \circ f)$;

(4) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f 和每个 Fuzzy 双理想 g, $f \cap g \subseteq (f \circ g) \cap (g \circ f)$;

(5) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 B 和每个 Fuzzy 右理想 R, $f \cap g \subseteq (f \circ g) \cap (g \circ f)$;

(6) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 L 和每个 Fuzzy 右理想 R, $f \cap g \subseteq (f \circ g) \cap (g \circ f)$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (3). 假设 (1) 成立, 对 S 的任意 Fuzzy 双理想 f, g 及 $a \in S$. 因为 S 是正则的, 所以存在 $x \in S$ 使得 $a = axa (= axaxa)$. 又 S 是内禀正则的, 存在 $y, z \in S$ 使得 $a = ya^2z$. 因此

$$a = axa = axaxa = ax(ya^2z)xa = (axya)(azxa).$$

因为 f, g 均为 Fuzzy 双理想, 所以 $f(axya) \geqslant \min\{f(a), f(a)\} = f(a)$, 且 $g(azxa) \geqslant \min\{g(a), g(a)\} = g(a)$. 因此

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a) &= \sup_{a=pq}[\min\{f(p), g(q)\}] \\ &\geqslant \min\{f(axya), g(azxa)\} \\ &\geqslant \min\{f(a), g(a)\} = (f \cap g)(a). \end{aligned}$$

由此得出 $f \cap g \subseteq f \circ g$. 同理可类似地推出 $f \cap g \subseteq g \circ f$. 故 (3) 成立.

因为每个 Fuzzy 左 (右) 理想是 Fuzzy 双理想, 因此 (3) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (6),(3) $\Rightarrow$ (2).(3) $\Rightarrow$ (5) 和 (5) $\Rightarrow$ (6) 显然.

(6) $\Longrightarrow$ (1). 假设 f 和 g 分别是 S 的 Fuzzy 右理想和 Fuzzy 左理想. 由假设 $f \cap g \subset (f \circ g) \cap (g \circ f) \subseteq g \circ f$. 根据定理 5.2.6, S 是内禀正则的. 另一方面, $f \cap g \subseteq (f \circ g) \cap (g \circ f) \subseteq f \circ g$. 又 $f \circ g \subseteq f \circ S \subseteq f$, $f \circ g \subseteq S \circ g \subseteq g$. 因此 $f \circ g \subseteq f \cap g$. 故 $f \circ g = f \cap g$. 根据定理 5.1.11, S 是正则的.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 B 是 S 的双理想，因为 B 的特征函数 f_B 是 S 的 Fuzzy 双理想，我们有 $\sup_{a=pq}[\min\{f_B(p), f_B(q)\}] = (f_B \circ f_B)(a) = f_B(a) = 1$. 这意味着存在 $b, c \in S$ 使得 $a = bc$, $f_B(b) = f_B(c) = 1$. 因此 $a = ba \in BB$, 即 $B \subseteq BB$ 因为 B 是双理想，逆包含关系总是成立的，所以 $B^2 = B$. 根据引理 5.2.3, S 是正则和内禀正则的. 证毕. □

5.2.8 定理　假设 S 是内禀正则的. 则下列各款是等价的：

(1) f 是 S 的 Fuzzy 理想；

(2) f 是 S 的 Fuzzy 内禀理想.

证　(1) 推 (2) 显然. 假设 (2) 成立，$a, b, u, v \in S$, 因为 S 是内禀正则的, 所以存在 $x, y \in S$ 使得 $a = xa^2y, b = ub^2v$. 因此 $f(ab) = f(xa^2yb) = f((xa)a(yb)) \geqslant f(a)$, 且 $f(ab) = f(aub^2v) = f((au)b(bv)) \geqslant f(b)$. 这意味着 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 证毕. □

5.3　完全正则半群与左单群半格

本节我们以 Fuzzy 左理想、 Fuzzy 右理想、 Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等为工具刻画完全正则半群与左单群半格.

5.3.1 定义　一个半群 S 称为 *完全正则的*, 如果 $(\forall a \in S)$ $(\exists x \in S)$ $axa = a, ax = xa$. S 称为 *左正则* (*右正则*), 如果 $(\forall a \in S)$ $(\exists x \in S)$ $a = xa^2 (a = a^2x)$.

我们有完全正则半群的刻画.

5.3.2 定理 [79]　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是完全正则的；

(2) S 为群并 (无交);

(3) S 是既是左正则又是右正则的；

(4) $a \in a^2Sa^2, \forall a \in S$.

类似于定理 5.2.4 的证明，我们可以完成以下练习.

5.3.3 练习　*设 S 为半群，下列各款等价：*

(1) S 是左正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f, $f(a) = f(a^2), \forall a \in S$.

5.3.4 练习　*设 S 为半群，下列各款等价：*

(1) S 是右正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 右理想 f, $f(a) = f(a^2), \forall a \in S$.

5.3.5 定理　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是完全正则的；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f, $f(a) = f(a^2), \forall a \in S$;

(3) 对 S 的每个 Fuzzy 右理想 f, Fuzzy 左理想 g, $f(a)-f(a^2), g(a)=g(a^2), \forall a \in S$.

证　由以上两个练习以及定理 5.3.2, (1) 和 (3) 等价. 下面我们证明 (1) 和 (2) 等价. 假设 S 是完全正则的, f 为的双理想, $a \in S$. 则

$$\begin{aligned} f(a) &= f(axa) = f(axaxaxa) = f(a^2x^3a^2) \geqslant \min\{f(a^2, f(a^2)\} = f(a^2) \\ &= f(aaxa) \geqslant \min\{f(a), f(a)\} = f(a). \end{aligned}$$

因此 $f(a)=f(a^2)$, 即 (2) 成立. 反之, 假设 (2) 成立, $\forall a \in S$, a^2Sa^2 是 S 的双理想. 因此 $f_{a^2Sa^2}$ 为 S 的 Fuzzy 双理想. 根据假设 $f_{a^2Sa^2}(a)=f_{a^2Sa^2}(a^2)=f_{a^2Sa^2}(a^4)=f_{a^2Sa^2}(a^8)$. 因为 $a^8 \in a^2Sa^2$, 所以 $f_{a^2Sa^2}(a)=f_{a^2Sa^2}(a^8)=1$, 即 $a \in a^2Sa^2$. 由定理 5.3.2, S 是完全正则的. 证毕. □

下面的引理归于 Lajos[60]

5.3.6 引理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是左单半群的半格;

(2) S 为左正则的且对 S 的任意两个左理想 A, B, $AB=BA$;

(3) S 为左正则的且是左舵的;

(4) S 的左理想集关于子集的乘法构成半格.

5.3.7 练习　*设 S 是左 (右) 正则半群. 则下列各款是等价的:*

(1) S 是左 (右) 舵的;

(2) S 是 Fuzzy 左 (右) 舵的.

关于左单半群的半格的刻画, 读者可以参看文献 [79]. 我们这里给出它的 Fuzzy 系统的刻画.

5.3.8 定理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是左单半群的半格;

(2) S 的每个 Fuzzy 左理想 f, $f(a)=f(a^2), f(ab)=f(ba), \forall a, b \in S$;

(3) S 是左正则的且 S 是 Fuzzy 左舵的;

(4) 对 S 的任意 Fuzzy 左理想 f, g, $f \cap g = f \circ g$;

(5) S 的 Fuzzy 左理想集关于 Fuzzy 子集的乘法构成半格.

证　(1) $\Rightarrow$ (2) 设 S 是左单半群的半格. 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f, 由定理 5.3.5 和练习 5.3.3, $f(a^2)=f(a)$. 再根据定理 5.3.5 和练习 5.3.7, f 是 S 的 Fuzzy 理想. 因此 $f(ab)=f((ab)^2)=f(a(ba)b) \geqslant f(ba)$. 类似地, 可以证明 $f(ba) \geqslant f(ab)$. 所以, $f(ab)=f(ba)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设 (2) 成立. 则 S 是左正则的. 设 A, B 是 S 的两个左理想, $a \in A, b \in B$. 则 $f_{L(ba)}$ 是 S 的 Fuzzy 左理想. 因为 $ba \in L(ba)$, 所以 $f_{L(ba)}(ab)=$

$f_{L(ba)}(ba)=1$, 即 $ab \in L(ba)=\{ba\}\cup Sba \subseteq BA \cup SBA \subseteq BA$. 因此 $AB \subseteq BA$. 对称地，我们可以证明 $BA \subseteq AB$.

由引理 5.3.6 和练习 5.3.7, (1) $\Rightarrow$ (3). (4) $\Rightarrow$ (5) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 对 S 的任意 Fuzzy 左理想 f,g, $a \in S$. 因为 S 是左正则的，所以存在 $x \in S$ 使得 $a = xa^2$. 因此

$$\begin{aligned}(f\circ g)(a) &= \sup_{a=yz}[\min\{f(y),g(z)\}]\\ &\geqslant \min\{f(xa),g(a)\} \geqslant \min\{f(a),g(a)\}\\ &= (f\cap g)(a),\end{aligned}$$

即 $f\cap g \subseteq f\circ g$.

另一方面， g 又是 S 的 Fuzzy 右理想，所以

$$\begin{aligned}(f\circ g)(a) &= \sup_{a=yz}[\min\{f(y),g(z)\}]\\ &\leqslant \sup_{a=yz}[\min\{f(yz),g(yz)\}]\\ &= \sup_{a=yz}[\min\{f(a),g(a)\}]\\ &= (f\cap g)(a),\end{aligned}$$

即 $f\cap g \supseteq f\circ g$. 以上证得 $f\cap g = f\circ g$.

(5) $\Longrightarrow$ (1). 为了证明 (1), 设 A,B 为 S 的左理想， $a \in AB$. 则存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$. 又 f_A 和 f_B 是 S 的 Fuzzy 左理想，因此

$$\begin{aligned}&\sup_{a=yz}[\min\{f_B(y),f_A(z)\}] = (f_B\circ f_A)(a)\\ =\ &(f_A\circ f_B)(a) = \sup_{a=yz}[\min\{f_A(y),f_B(z)\}]\\ \geqslant\ &\min\{f_A(b),f_B(c)\}=1.\end{aligned}$$

这意味着存在 $p,q \in S$ 使得 $a=pq$, $f_B(p)=f_A(q)=1$. 因此 $a=pq\in BA$. 则 $AB\subseteq BA$. 类似地，我们可以证明 $BA\subseteq AB$. 故 $AB=BA$.

因为 $f_A\circ f_A = f_A$, 所以对任意 $a\in A$, $\sup_{a=yz}[\min\{f_A(y),f_A(z)\}]=(f_A\circ f_A)(a)=f_A(a)=1$. 因此存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$, $f_A(b)=f_A(c)=1$. 故 $a=bc\in AA$, 即 $A\subseteq A^2$. 又因为 f_A 为 S 的 Fuzzy 左理想，逆包含关系当然成立. 根据引理 5.3.6, S 是左单半群的半格. 证毕. □

对偶地，我们有

5.3.9 定理　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是右单半群的半格；

(2) S 的每个 Fuzzy 右理想 f, $f(a)=f(a^2), f(ab)=f(ba), \forall a,b\in S$;

(3) S 是右正则的且 S 是 Fuzzy 右舵的;

(4) 对 S 的任意 Fuzzy 右理想 f,g, $f\cap g=f\circ g$;

(5) S 的 Fuzzy 右理想集关于 Fuzzy 子集的乘法构成半格.

下面我们给出 Fuzzy 单半群 (左, 右单) 的定义, 并进一步讨论 Fuzzy 单半群 (左, 右单) 和单半群 (左, 右单) 的关系.

5.3.10 定义　一个半群 S 称为 Fuzzy *左单的* (*右单的*), 如果 S 的每个 Fuzzy 左理想 (右理想) 是常数. 一个半群 S 称为 Fuzzy *单的*, 如果 S 的每个 Fuzzy 理想是常数.

5.3.11 定理　设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是左单半群;

(2) S 是 Fuzzy 左单半群.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 S 是左单半群, $a,b\in S$. 存在 $x,y\in S$ 使得 $b=xa, a=yb$. 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f, $f(a)=f(yb)\geqslant f(b)=f(xa)\geqslant f(a)$. 故 f 是常数.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 (2) 成立, A 为 S 的左理想. 则 f_A 为 S 的 Fuzzy 左理想. 由假设 f_A 为常数, 因为 A 不为空集, 只有 $f_A=1$. 因此 $S=A$. 证毕. □

作为练习, 类似地我们可以证明:

5.3.12 练习　*设 S 是半群. 则下列各款成立:*

(1) S 是右单的当且仅当 S 是 Fuzzy 右单的.

(2) S 是单的当且仅当 S 是 Fuzzy 单的.

(3) S 是群的当且仅当 S 是 Fuzzy 右单的和 Fuzzy 左单的.

5.3.13 定理　设 S 为左单半群. 则 S 的每个 Fuzzy 双理想是 Fuzzy 左 (右) 理想.

证　设 f 是 S 的 Fuzzy 双理想, $a,b\in S$. 因为 S 是左单的, 存在 $x\in S$ 使得 $b=xa$. 因此 $f(ab)=f(axa)\geqslant\min\{f(a),f(a)\}=f(a)$. 这意味着 f 是 S 的 Fuzzy 右理想. 同理我们可以证明 f 是 S 的 Fuzzy 右理想. 证毕. □

5.3.14 定理　设 S 为半群. 则下列各款等价:

(1) S 是单的;

(2) S 是内禀正则和阿基米德的.

证　假设 S 是单的, 则 S 的每个 Fuzzy 理想是常数. 因此 $(\forall a\in S)\ f(a)=f(a^2)$. 由定理 5.2.4, S 是内禀正则的. 为了证明 S 是阿基米德的, 设 $a,b\in S$. 因为 S 是单的, 所以存在 $x,y\in S$ 使得 $a=xby$.

反之, 假设 (2) 成立, 设 f 是 S 的 Fuzzy 理想. 由定理 5.2.4, f 是半素的. 再由定理 3.1.3, f 是常数. 因此 S 是单的. 证毕. □

一个半群称为是 *弱可换的*, 如果 $a,b\in S$, 存在 $n\in N$ 使得 $(ab)^n\in bSa$.

5.3.15 引理 (Petrich[60])　每个弱可换半群是阿基米德半群的半格.

5.3.16 引理 (Clifford etc.[15])　S 是群当且仅当 S 不含真的拟理想.

5.3.17 定理　设 S 为无零元半群. 则下列各款等价:

(1) S 是群;

(2) S 的每个 Fuzzy 拟理想是常数.

证　假设 (1) 成立, f 为 S 的 Fuzzy 拟理想, $a, b \in S$. 因为 S 是群, 所以存在 $x, y \in S$ 使得 $a = bx = yb$. 因此

$$\begin{aligned} f(a) &\geqslant ((f \circ S) \cap (S \circ f))(a) \\ &= \min\{(f \circ S)(a), (S \circ f)(a) \\ &= \min\{\sup_{a=pq}[\min\{f(p), S(q)\}], \sup_{a=pq}[\min\{S(p), f(q)\}]\} \\ &\geqslant \min\{\min\{f(b), S(x), S(y), f(b)\}\} = f(b). \end{aligned}$$

对称地, 我们可以证明 $f(b) \geqslant f(a)$. 因此 S 的每个 Fuzzy 拟理想是常数.

反之, 假设 (2) 成立, 设 S 不是群, 则 S 包含真的拟理想 Q. 这时, f_Q 是 S 的 Fuzzy 拟理想, 但它不是常数. 矛盾. 因此 S 是群. 证毕. □

5.3.18 定理　设 S 为半群. 则下列各款等价:

(1) S 是完全正则半群;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 拟理想 f, $f(a) = f(a^2), \forall a \in S$;

(3) 对 S 的每个 Fuzzy 拟理想 f, $f(a) = f(a^{n+1}), \forall a \in S, n \in N$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2). 假设 (1) 成立, f 为 S 的 Fuzzy 拟理想, $a \in S$. 因为 S 是完全正则的, 所以存在 $x, y \in S$ 使得 $a = a^2x = ya^2$. 因此

$$\begin{aligned} f(a) &\geqslant ((f \circ S) \cap (S \circ f))(a) \\ &= \min\{(f \circ S)(a), (S \circ f)(a) \\ &= \min\{\sup_{a=pq}[\min\{f(p), S(q)\}], \sup_{a=pq}[\min\{S(p), f(q)\}]\} \\ &\geqslant \min\{\min\{f(a^2), S(x), S(y), f(a^2)\}\} = f(a^2) \geqslant f(a). \end{aligned}$$

因此 S 的每个 Fuzzy 拟理想 f, $f(a) = f(a^2). \forall a \in S$.

(2) $\longrightarrow$ (1). 设 $a \in S$. 则 $Q(a^2) \quad \{a^2\} \cap a^2S \cap Sa^2$ 是 S 的拟理想. 因此 $f_{Q(a^2)}$ 是 S 的 Fuzzy 拟理想. 由假设, $f_{Q(a^2)}(a) = f_{Q(a^2)}(a^2) = 1$. 因此, $a \in Q(a^2)$. 由定理 5.3.2, S 是完全正则的.

(3) $\Longrightarrow$ (2). 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 对任意的正整数 n,

$$\begin{aligned}(f\circ S)(a^{4n}) &= \sup_{a^{4n}=xy}[\min\{f(x),S(y)\}]\\ &\geqslant \min\{f(a^{n+1}),S(a^{3n-1})\}=f(a^{n+1}).\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $(S\circ f)(a^{4n})\geqslant f(a^{n+1})$. 因此

$$\begin{aligned}f(a^n) &= f(a^{2n})=f(a^{4n})\\ &\geqslant ((f\circ S)\cap(S\circ f))(a^{4n})\\ &= \min\{(f\circ S)(a^{4n}),(S\circ f)(a^{4n})\}\\ &\geqslant \min\{f(a^{n+1}),f(a^{n+1})\}=f(a^{n+1}).\end{aligned}$$

由定理 2.3.23, $f(a^n)=f(a^{n+1}),\forall n\in N$. 证毕. □

5.4 群 半 格

本节我们以 Fuzzy 左理想、 Fuzzy 右理想、 Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等为工具刻画群半格.

5.4.1 引理 (Lajos[62], Clifford[15]) 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) S 是所有双理想集关于子集的乘法构成半格；

(3) S 是正则的且 $aS=Sa,\forall a\in S$.

5.4.2 引理 (Lajos[62]) 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) 对 S 的每个左理想 L 和每个右理想 R, $LR=L\cap R$;

(3) 对 S 的每个左理想 L 和每个双理想 B, $LB=L\cap B$;

(4) 对 S 的每个双理想 B 和每个右理想 R, $B\cap R=BR$;

(5) S 是正则半群且是左舵的.

我们知道，一个半群如果是群半格，则它的每个双理想是理想. 因此我们有下面的定理.

5.4.3 定理 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) S 的每个 Fuzzy 双理想是 Fuzzy 理想.

5.4.4 引理 (Lajos[62]) 设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) S 是所有拟理想集关于子集的乘法构成半格.

下面我们用 Fuzzy 拟理想给出群半格的刻画.

5.4.5 定理　设 S 为半群，下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 右理想 f, $g\circ f=g\cap f$;

(3) 对 S 的每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 双理想 h, $g\circ h=g\cap h$.

(4) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 h 和每个 Fuzzy 右理想 f, $h\cap f=h\circ f$;

(5) 对 S 的 Fuzzy 双理想 h_1, h_2, $h_1\cap h_2=h_1\circ h_2$.

证　因为 S 的每个左 (右)Fuzzy 理想是 Fuzzy 双理想，(5) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (2), (5) $\Rightarrow$ (4) 和 (4) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 为了证明 (1), 设 L, R 分别为 S 的左理想和右理想，$a\in L\cap R$. 则 $f_L(a)=f_R(a)=1$. 又 f_L 和 f_R 分别是 S 的 Fuzzy 左理想和 Fuzzy 右理想. 因此

$$\begin{aligned}&\sup_{a=yz}[\min\{f_L(y),f_R(z)\}]=(f_L\circ f_R)(a)\\=&\min\{f_L(a),f_R(a)\}=1.\end{aligned}$$

这意味着存在 $p,q\in S$ 使得 $a=pq$, $f_L(p)=f_R(q)=1$. 因此 $a=pq\in LR$. 则 $L\cap R\subseteq LR$.

为了证明反包含关系，对任意 $a\in LR$, 存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$ 且

$$\begin{aligned}&\sup_{a=yz}[\min\{f_L(y),f_R(z)\}]=(f_L\circ f_R)(a)\\=&(f_L\cap f_R)(a)=\min\{f_L(a),f_R(a)\}\\\geqslant&\min\{f_L(b),f_R(c)\}=1.\end{aligned}$$

因此 $f_L(a)=f_R(a)=1$. 故 $a\in L\cap R$, 即 $LR\subseteq L\cap R$. 根据引理 5.4.3, S 是群半格.

(1) $\Longrightarrow$ (5). 假设 h_1, h_2 为 S 的 Fuzzy 双理想，根据定理 5.4.3, h_1, h_2 为 S 的 Fuzzy 理想. 再根据引理 5.4.2 和定理 5.1.11, $h_1\cap h_2=h_1\circ h_2$. 证毕.　□

5.4.6 定理　设 S 为半群. 则下列各款等价：

(1) S 是群半格；

(2) S 是所有 Fuzzy 双理想集关于子集的乘法构成半格.

证　(1) $\Rightarrow$ (2) 从上定理即可看出. 假设 (2) 成立. 设 A, B 为 S 的双理想，$a\in AB$. 则存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$. 又 f_A 和 f_B 是 S 的 Fuzzy 双理想. 因此

$$\begin{aligned}(f_B\circ f_A)(a)&=\sup_{a=yz}[\min\{f_B(y),f_A(z)\}]=(f_A\circ f_B)(a)\\&=\sup_{a=yz}[\min\{f_A(y),f_B(z)\}]\\&\geqslant\min\{f_A(b),f_B(c)\}=1.\end{aligned}$$

这意味着存在 $p,q\in S$ 使得 $a=pq$, $f_B(p)=f_A(q)=1$. 因此 $a=pq\in BA$. 则 $AB\subseteq BA$ 类似地，我们可以证明反包含关系.

因为 $f_A\circ f_A=f_A$. 所以对任意 $a\in A$, $\sup_{a=yz}[\min\{f_A(y),f_A(z)\}]=(f_A\circ f_A)(a)=f_A(a)=1$. 因此存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$, $f_A(b)=f_A(c)=1$. 故 $a=bc\in AA$, 即 $A\subseteq A^2$. 又因为 f_A 为 S 的 Fuzzy 双理想，逆包含关系当然成立. 根据引理 5.4.1, S 是群半格. 证毕. □

5.4.7 定理 设 S 为半群. 则下列各款等价：

(1) S 是群半格;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 拟理想 f, $f(a)=f(a^2)$, $f(ab)=f(ba),\forall a,b\in S$.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 假设 (1) 成立，f 为 S 的 Fuzzy 拟理想，$a\in S$. 根据引理 5.3.2 和定理 5.3.19, S 是完全正则的且对 S 的每个 Fuzzy 拟理想 f, $f(a)=f(a^2),\forall a\in S$. 设 $a,b\in S$. 根据引理 5.4.6, aba 和 bab 生成的拟理想 $Q(aba),Q(bab)$ 可换. 因此

$$\begin{aligned}(ab)^3&=(aba)(bab)\in Q(aba)Q(bab)=Q(bab)Q(aba)\\&=(bab\cup(babS\cap Sbab))(aba\cup Saba\cap abaS)\\&\subseteq(bab\cup babS)(aba\cup abaS)\subseteq(baS)(Sba)\\&=baS\cap Sba.\ (\text{引理 5.1.6})\end{aligned}$$

这意味着存在 $x,y\in S$ 使得 $(ab)^3=bax=yba$. 根据定理 5.3.19,

$$\begin{aligned}f(ab)=f((ab)^3)&\geqslant((f\circ S)\cap(S\circ f))((ab)^3)\\&=\min\{(f\circ S)((ab)^3),(S\circ f)((ab)^3)\}\\&=\min\left\{\sup_{(ab)^3=pq}[\min\{f(p),S(q)\}],\ \sup_{(ab)^3=pq}[\min\{S(p),f(q)\}]\right\}\\&\geqslant\min\{\min\{f(ba),S(x)\},\min\{S(x),f(ba)\}\}=f(ba).\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明 $f(ba)\geqslant f(ab)$. 因此 $f(ab)=f(ba),\forall a,b\in S$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 假设 (2) 成立，根据定理 5.3.19, S 是完全正则半群. 设 A 为 S 的拟理想，$a\in A$. 则 $a\in a^2Sa^2=a(a(Sa)a)\subseteq a(aSa)\subseteq a(aS\cap Sa)\subseteq A(AS\cap SA)\subseteq AA$. 因此 $A\subseteq AA$. 又因为 S 的每个拟理想是 S 的子半群，所以 $AA\subseteq A$. 因此 $A^2=A$.

设 A,B 为 S 的拟理想，$a\in A,b\in B$. ab 生成的拟理想 $Q(ab)$ 的特征函数 $f_{Q(ab)}$ 是 S 的 Fuzzy 拟理想. 由假设，$f_{Q(ab)}(ab)=f_{Q(ab)}(ba)=1$. 因此 $ba\in Q(ab)=\{ab\}\cup(abS\cap Sab)$. 如果 $ab=ba$, 则 $ba\in AB$. 如果 $ba\in abS\cap Sab$, 根据引理 5.1.6, $ba\in(abS)(Sab)\subseteq a(bSb)\subseteq a(bS\cap Sb)\subseteq A(BS\cap SB)\subseteq AB$. 因此 $BA\subseteq AB$. 类似地，可以证明 $AB\subseteq BA$. 以上证明了 S 是所有拟理想集关于子集的乘法构成半格. 由引理 5.4.6, S 是群. 证毕. □

一个半群 S 的 Fuzzy 拟理想 f 称为是 *Q-正规的*，如果 $f(ab)=f(ba), \forall a,b\in S$. 如果 S 的每个 Fuzzy 拟理想均为 Q- 正规的，S 称为 *Fuzzy Q^*-正规的*.

5.4.8 推论　设 S 是带. 下列各款等价：

(1) S 是可换的；

(2) S 是 Fuzzy Q^*- 正规的.

5.4.9 定理　每个 Fuzzy Q^*- 正规的半群是阿基米德半群的半格.

证　设 S 是 Fuzzy Q^*- 正规半群. 设 $a,b\in S$, f 是 S 的 Fuzzy 拟理想. 拟理想 $Q(ba)$ 的特征函数 $f_{Q(ba)}$ 是 S 的 Fuzzy 拟理想. 因为 $f_{Q(ba)}$ 是 Q- 正规的，所以 $f_{Q(ba)}(ab)=f_{Q(ba)}(ba)=1$. 因此 $ab\in Q(ba)=\{ba\}\cup(baS\cap Sba)$. 如果 $ab=ba$, 则 $(ab)^2=abab\in bSa$. 如果 $ab\in baS\cap Sba$, 则 $(ab)^2\in(baS)(Sba)\subseteq bSa$. 这意味着 S 是弱可换的，由引理 5.3.16, S 是阿基米德半群的半格. 证毕. □

5.5　拟正则半群

本节我们以 Fuzzy 左理想、Fuzzy 右理想、Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等为工具刻画拟正则半群.

5.5.1 定义　一个半群 S 称为 *左拟正则的*，如果对 S 的任意左理想 L 有 $L^2=L$.

5.5.2 引理 (Calais[14])　一个半群 S 是左拟正则的当且仅当 $(\forall a\in S)$ $(\exists x\in S)$ $a=xaya$.

由 Calais 引理我们可以完成以下练习.

5.5.3 练习　*左拟正则半群 S 的 Fuzzy 广义双理想是 Fuzzy 双理想.*

5.5.4 定理　一个半群 S 是左拟正则的当且仅当对 S 的每个 Fuzzy 左理想 f, $f\circ f=f$.

证　必要性. 假设 S 是左拟正则的，f 是 S 的 Fuzzy 左理想. 则 $f\circ f\subseteq f$. 为了证明反包含关系，设 $a\in S$, 由引理 5.5.2, 存在 $x,y\in S$ 使得 $a=xaya$. 因此

$$\begin{aligned}(f\circ f)(a) &= \sup_{a=pq}(\min(f(p),f(q)))\geqslant\min(f(xa),f(ya))\\ &\geqslant\min(f(a),f(a))=f(a),\end{aligned}$$

即 $f\circ f\supseteq f\Rightarrow f\circ f=f$.

充分性. 假设 S 的每个左理想 Fuzzy 是幂等的. 设 L 为 S 的左理想，$a\in L$. 则 f_l 为 S 的 Fuzzy 左理想. 由假设 $(f_L\circ f_L)(a)=f_L(a)=1$. 因此 $(f_L\circ f_L)(a)\neq 0$. 且 $\sup_{a=pq}(\min(f_L(p),f_L(q)))=(f_L\circ f_L)a)=1$. 这意味着存在 $b,c\in S$ 使得 $a=bc$, $f_L(b)=f_L(c)=1$. 因此 $a=bc\in LL$, 即 $L\subseteq LL$. 因为 $LL\subset L$. 所以 $LL=L$. 故 S 是左拟正则的. 证毕. □

5.5.5 引理 (Lajos[59]) 一个半群 S 是内禀正则和拟正则的当且仅当对 S 的每个广义双理想 B, 左理想 L 和右理想 R, $L \cap R \cap B \subseteq LRB$.

5.5.6 定理 设 S 为半群, 下列各款等价:

(1) S 是内禀正则和拟正则的;

(2) 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f, 每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 右理想 h, $g \cap h \cap f \subset g \circ h \circ f$.

(3) 对 S 的每个 Fuzzy 广义双理想 f, 每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 右理想 h, $g \cap h \cap f \subseteq g \circ h \circ f$.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 (1) 成立, 对 S 的每个 Fuzzy 双理想 f, 每个 Fuzzy 左理想 g 和每个 Fuzzy 右理想 h, $a \in S$, 因为 S 是内禀正则的, 存在 $x, y \in S$ 使得 $a = xa^2y$. 又 S 是左拟正则的, 由引理 5.5.2, 存在 $u, v \in S$ 使得 $a = uava$. 因此 $a = uava = u(xa^2y)va = ((ux)a)((a(yv))a)$. 所以

$$
\begin{aligned}
(g \circ h \circ f)(a) &= \sup_{a=pq} (\min(g(p), h \circ f(q))) \\
&\geqslant \min(g((ux)a), (fcircf)((ayv)a)) \\
&\geqslant \min(g(a), \sup_{ayva=pq} (\min(h(p), f(q))) \\
&\geqslant \min(g(a), \min(h(a(yv)), f(a))) \\
&\geqslant \min(g(a), \min(h(a), f(a))) \\
&= (g \cap h \cap f)(a),
\end{aligned}
$$

即 $g \circ h \circ f \supseteq g \cap h \cap f$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 显然. 类似于定理 5.1.11 中 (5) $\Rightarrow$ (1) 的证明, 我们能得出 (3) $\Rightarrow$ (1). 证毕. □

5.6 Fuzzy 正则半群

假设 $x \in S$. 记

$$
R_x := \{x' \mid x' \in S, xx'x = x\}, \quad C_x := \{y \mid y \in S, yx = xy\}.
$$

则我们有下列性质:

5.6.1 性质 设 S 为半群. 则下列各款等价:

(1) x 是正则元;

(2) $R_x \neq \emptyset$;

(3) $x \in xSx$.

5.6.2 性质 设 S 为半群. 则下列各款等价:

(1) x 是完全正则元;

(2) $C_x \neq \emptyset$;

(3) $x \in x^2Sx^2$;

(4) $x \in x^2S \cap Sx^2$.

5.6.3 性质　设 S,T 为半群, φ 为 S 到 T 的满同态映射. 则下列各款成立:

(1) $\varphi(R_x) \subseteq R_{\varphi(x)}, \forall x \in S$;

(2) $\varphi^{-1}(R_y) \supseteq R_{\varphi^{-1}(x)}, \forall y \in T$.

5.6.4 定义　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群, 如果对任意的 $x \in S$, $f(x) \neq 0$ 存在 $x' \in R_x$ 使得 $f(x') \geqslant f(x)$, f 称是 S 的 Fuzzy 正则子半群.

5.6.5 定理　设 S 为半群, $f \in F(S)$. 则下列各款等价:

(1) f 为 S 的 Fuzzy 正则子半群;

(2) 对任意 $\lambda \in (0,1]$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 f_λ 是 S 的正则子半群;

(3) f 是 S 的 Fuzzy 子半群且对任意点 $x_\lambda \in S, \lambda \in (0,1]$, 如果 $x_\lambda \in f$, 则存在 $x'_\lambda \in f$ 使得 $x_\lambda \circ x'_\lambda \circ x_\lambda = x_\lambda$.

证　(1) $\Longrightarrow$ (2) 假设 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群. 对任意 $\lambda \in (0,1]$, 假设 $f_\lambda \neq \emptyset$. 任取 $x \in f_\lambda$, 存在 $x' \in R_x$ 使得 $f(x') \geqslant f(x) \geqslant \lambda$. 因此 $x' \in f_\lambda$. 因为 f 是 Fuzzy 子半群, 所以 f_λ 是 S 的子半群. 故 f_λ 是 S 的正则子半群.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 根据定理 2.1.8, f 是 S 的 Fuzzy 子半群. 对任意点 $x_\lambda \in S, \lambda \in (0,1]$, 如果 $x_\lambda \in f$, 则 $x \in f_\lambda \neq \emptyset$. 根据假设存在 $x' \in f_\lambda$ 使得 $x = xx'x$. 根据练习 2.3.8, $x_\lambda = (xx'x)_\lambda = x_\lambda \circ x'_\lambda \circ x_\lambda$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 由假设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群. 如果存在 $x \in S$, $f(x) \neq 0$, 对任意 $x' \in R_x$ 均有 $f(x') < f(x)$. 显然 $x \in f_{f(x)}$, 但 $x' \notin f_{f(x)}$. 这说明 $f_{f(x)}$ 不是正则子半群. 因此对 $x_{f(x)} \in f$, 不存在 $x'_{f(x)} \in f$ 使得 $x_{f(x)} \circ x'_{f(x)} \circ x_{f(x)} = x_{f(x)}$. 矛盾. 证毕. □

由上定理, 我们可以给出 Fuzzy 正则子半群的一个较容易接受的 Fuzzy 点化的定义.

5.6.6 定义　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群, 对于任意 $x_\lambda \in f, \lambda \in (0,1]$, 存在 $y_\lambda \in f$ 使得 $x_\lambda \circ y_\lambda \circ x_\lambda = x_\lambda$. 称 f 称是 S 的 Fuzzy 正则子半群.

5.6.7 定理　设 A 为 S 的非空子集. 则 A 是正则子半群当且仅当它的特征函数 f_A 是 S 的 Fuzzy 正则子半群.

证　设 A 是 S 的正则子半群, 则它的特征函数 f_A 是 S 的 Fuzzy 子半群. 对任意的 $x_\lambda \in f_A, \lambda \in (0,1]$, $f_A(x) \geqslant x_\lambda x = \lambda$. 因此 $f_A(x) = 1$, 即 $x \in A$. 另一方面, 因为 A 是正则的, 存在 $y \in A$ 使得 $x = xyx$. 则 $x_\lambda = x_\lambda \circ y_\lambda \circ x_\lambda$. 因为 $y \in A, f_A(y) = 1 \geqslant \lambda, \lambda \in (0,1]$, 所以 $y_\lambda \in f_A$. 综合上述两步, f_A 是 Fuzzy 正则子半群.

反之，对任意的 $x \in A, f_A(x) = 1 \geqslant \lambda, \lambda \in (0,1]$，当然 $x_\lambda \in f_A$. 因为 f_A 是 S 的 Fuzzy 正则子半群，所以存在 $y_\lambda \in f_A$ 使得 $x_\lambda = x_\lambda \circ y_\lambda \circ x_\lambda = (xyx)_\lambda$，这推出 $x = xyx$. 因为 $y_\lambda \in f_A, f_A(y) \geqslant \lambda$ 即 $f_A(y) = 1, y \in A$, 所以 A 是正则的. 证毕. □

5.6.8 定义　S 的 Fuzzy 子半群 f 称为 S 的 Fuzzy *内禀正则* 的，如果对任意的 $a_\lambda \in f, \lambda \in (0,1]$, 存在 $x_\lambda, y_\lambda \in f$ 使得 $x_\lambda \circ (a^2)_\lambda \circ y_\lambda = a_\lambda$.

5.6.9 定义　S 的 Fuzzy 子半群 f 称为 S 的 Fuzzy *左 (右) 内禀正则* 的，如果对任意的 $a_\lambda \in f, \lambda \in (0,1]$, 存在 $x_\lambda \in f$ 使得 $x_\lambda \circ (a^2)_\lambda$　$((a^2)_\lambda \circ x_\lambda) = a_\lambda$.

类似于以上关于 Fuzzy 正则子半群的描述，我们可以证明以下一组结论. 读者可以作为练习.

5.6.10 定理　半群 S 的一个 Fuzzy 子集是 Fuzzy 内禀正则的当且仅当对任意 $\lambda \in (0,1]$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 f_λ 是 S 的内禀正则子半群.

5.6.11 定理　半群 S 的一个 Fuzzy 子集是 Fuzzy 左 (右) 正则的当且仅当对任意 $\lambda \in (0,1]$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 f_λ 是 S 的左 (右) 正则子半群.

5.6.12 定理　设 A 为 S 的非空子集. 则 A 是内禀正则的当且仅当它的特征函数 f_A 是 S 的 Fuzzy 内禀正则的.

5.6.13 定理　设 A 为 S 的非空子集. 则 A 是左 (右) 正则的当且仅当它的特征函数 f_A 是 S 的 Fuzzy 左 (右) 正则.

假设 f 是半群 S 的 Fuzzy 子集，$B \subseteq S$. f *在 B 上的限制* 定义为 B 的 Fuzzy 子集，记为 $f|_B$ 且 $f|_B(x) = f(x), \forall x \in B$.

5.6.14 定理　设 f 为 S 的 Fuzzy 子集. 则 f 是 Fuzzy 左 (右，内禀) 正则的当且仅当对任意的 $\lambda \in (0,1], g \subseteq f$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$ 且 g 在 f_λ 上的限制 $g|_{f_\lambda}$ 是 f_λ 的 Fuzzy 左 (右，双边) 理想，则 $g|_{f_\lambda}$ 在 f_λ 上是 Fuzzy 半素的.

证　我们仅证明左的情况. 假设 f 是 Fuzzy 左正则的，$\lambda \in (0,1]$. 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 f_λ 是左正则的. 设 $g \subseteq f$, g 在 f_λ 上的限制 $g|_{f_\lambda}(f_\lambda \neq \emptyset)$ 是 f_λ 的 Fuzzy 左理想. 则根据练习 5.3.6, $g|_{f_\lambda}$ 是 Fuzzy 半素的.

反之，对任意 $\alpha \in (0,1]$, 如果 $f_\alpha \neq \emptyset$, 设 F 是 f_α 的左理想. 定义 S 的一个 Fuzzy 子集 g 为：　$g(x) = \alpha, x \in F; g(x) = 0, x \notin F$. 显然 $g \subseteq f, g_\alpha = F - (g|_{f_\alpha})_\alpha$.

下面我们证明 $g|_{f_\alpha}$ 是 f_α 的 Fuzzy 左理想. 事实上，对任意 $x, y \in f_\alpha$, 如果 $g|_{f_\alpha}(y) \neq 0$, 则 $g|_{f_\alpha}(y) = \alpha$, 即 $g(y) = \alpha$. 由 g 的定义，$y \in F$. 又因为 F 是 f_α 的左理想，所以 $xy \in F \subseteq f_\alpha$. 进一步地，

$$(g|_{f_\alpha})(xy) = g(xy) = \alpha \geqslant g(y) = (g|_{f_\alpha})(y).$$

假如 $g|_{f_\alpha}(y) = 0$, 当然 $g|_{f_\alpha}(xy) \geqslant g|_{f_\alpha}(y)$. 因此对任意 $x, y \in f_\alpha$, $g|_{f_\alpha}(xy) \geqslant g|_{f_\alpha}(y)$.

由假设 $g|_{f_\alpha}$ 是 f_α 上 Fuzzy 半素的. 因为 $(g|_{f_\alpha})_\alpha = g_\alpha = F \neq \emptyset$, 所以 $(g|_{f_\alpha})_\alpha = F$ 是半素的. 根据练习 5.2.6, f_α 是左正则的，因此 f 是 Fuzzy 正则的. 证毕. □

设 $A \subseteq S$, $\alpha \in (0,1]$. 定义 αA 是一个 Fuzzy 子集, $\alpha A(x) = \alpha \wedge f_A(x), \forall x \in S$. 如果 G 是群, 则 αG 是 G 的 Fuzzy 子群, 且有 $\alpha(\bigcup_{i\in T} H_i) = \bigcup_{i\in T} \alpha H_i$.

5.6.15 定理　设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 如果 f 既是 Fuzzy 左正则的又是 Fuzzy 右正则的, 则 f 是 S 的 Fuzzy 子群的并.

证　设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 根据 Fuzzy 子集的分解定理,

$$(\forall \beta \in (0,1]) \ \ f = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} f_\alpha = \bigcup_{\beta\in(0,1], f_\beta\neq\emptyset} \beta f_\beta.$$

由假设 βf_β 是左, 右正则子半群. 根据定理 5.3.2, f_β 是群并, 即 $f_\beta = \bigcup_{i\in T_\beta} H_i(\beta)$, 这里 $H_i(\beta)$ 是群. 因此

$$f = \bigcup_{\beta\in(0,1], f_\beta\neq\emptyset} \beta f_\beta = \bigcup_{\beta\in(0,1], f_\beta\neq\emptyset} \beta\Big(\bigcup_{i\in T_\beta} H_i(\beta)\Big) = \bigcup_{\beta\in(0,1], f_\beta\neq\emptyset} \bigcup_{i\in T_\beta} \beta H_i(\beta).$$

证毕. □

5.6.16 练习　*设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 如果 f 是的 Fuzzy 子群的有限并, 证明 f 既是 Fuzzy 左正则的又是 Fuzzy 右正则的.*

5.6.17 引理　假设 φ 是半群 S 到半群 T 的满同态映射. 则

(1) 如果 A 是 S 的正则 (内禀正则, 左正则, 右正则, 完全正则) 子半群, 则 $\varphi(A)$ 是 T 的正则 (内禀正则, 左正则, 右正则, 完全正则) 子半群;

(2) 如果 B 是 T 的正则 (内禀正则, 左正则, 右正则, 完全正则) 子半群, 则 $\varphi^{-1}(B)$ 是 S 的正则 (内禀正则, 左正则, 右正则, 完全正则) 子半群.

5.6.18 引理　假设 φ 是半群 S 到半群 T 的映射. $A \in F(S), B \in F(T)$. 则对任意的 $\lambda \in (0,1]$,

(1) $(\varphi(A))_\lambda^> = \varphi(A_\lambda^>)$;

(2) $(\varphi^{-1}(B))_\lambda = \varphi^{-1}(B_\lambda)$;

(3) $(\varphi^{-1}(B))_\lambda^> = \varphi^{-1}(B_\lambda^>)$.

5.6.19 定理　假设 φ 是半群 S 到半群 T 的满同态映射. 则

(1) 如果 μ 是 S 的 Fuzzy 正则子半群, 则 $\varphi(\mu)$ 是 T 的 Fuzzy 正则子半群;

(2) 如果 ν 是 T 的 Fuzzy 正则子半群, 则 $\varphi^{-1}(\nu)$ 是 S 的 Fuzzy 正则子半群.

证　(1) 我们仅需证明对任意的 $\lambda \in (0,1]$, 只要 $(\varphi(\mu))_\lambda \neq \emptyset$, $(\varphi(\mu))_\lambda$ 是 T 的正则子半群. 反之, 如果存在 $\lambda_0 \in (0,1]$, $(\varphi(\mu))_{\lambda_0} \neq \emptyset$, 但是 $(\varphi(\mu))_{\lambda_0}$ 不是 T 的正则子半群. 存在 $t \in (\varphi(\mu))_{\lambda_0}$ 使得 $\forall t' \in R_t$, $t' \notin (\varphi(\mu))_{\lambda_0}$, 即 $(\varphi(\mu))(t) \geqslant \lambda_0 \neq 0$, 且 $\forall t' \in R_t$, $(\varphi(\mu))(t') < \lambda_0$, $\sup_{y\in\varphi^{-1}(t)} \mu(y) \geqslant \lambda_0$, $\sup_{z\in\varphi^{-1}(t')} \mu(z) < \lambda_0$. 设 $0 < \lambda < \lambda_0$, 且 $\sup_{y\in\varphi^{-1}(t)} \mu(y) > \lambda$, $\sup_{z\in\varphi^{-1}(t')} \mu(z) < \lambda$. 存在 $y_0 \in S$ 使得 $\varphi(y_0) = t$, 且 $\mu(y_0) > \lambda$, 即 $y_0 \in \mu_\lambda, \mu_\lambda \neq \emptyset$. 对任意 $z \in St' \in R_t$, 如果 $\varphi(z) = t'$, 则

$\mu(z) < \lambda \to z \notin \mu_\lambda$ 显然 $(\forall y_0' \in R_{y_0})$ $y_0y_0'y_0 = y_0 \Rightarrow t\varphi(y_0')t = t \Rightarrow \varphi(y_0') \in R_t$. 因此 $y_0' \notin \mu_\lambda$, 即 μ_λ 是非正则的，矛盾.

(2) 假设 $\nu \in F(T)$ 是 T 的 Fuzzy 正则子半群. 根据定理 5.6.5, 对任意 $t \in (0,1]$, ν_t 是 S 的正则子半群. 由引理 5.6.17, 5.6.18, $(\varphi^{-1}(\nu_t)) = (\varphi^{-1}(\nu))_t$ 是 S 的正则子半群，再根据定理 5.6.5, $\varphi^{-1}(\nu)$ 是 S 的 Fuzzy 正则子半群. 证毕. □

5.6.20 定理　如果 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群，则 $f \circ f = f$.

证　显然 $f \circ f \subseteq f$. 下面我们证明反包含关系. $\forall x \in S$, 如果 $f(x) = 0$, 当然 $(f\circ f)(x) \geqslant f(x)$. 如果 $f(x) \neq 0$, 则存在 $x' \in R_x$ 使得 $\mu(x') \geqslant \mu(x)$. 因为 f 是 Fuzzy 正则的，因此 $(f\circ f)(x) \geqslant \vee_{yz=x}\{f(y)\wedge f(z)\} \geqslant (f(xx')\wedge f(x)) \geqslant f(x')\wedge f(x) = f(x)$, 即 $f \circ f \supseteq f$. 证毕. □

如果半群 S 没有单位元，对 S 的任意 Fuzzy 子集 f, 我们定义 f 的相应的 S^1 上 Fuzzy 子集 f' 为：　$f'(1) = 1, f'(x) = f(x), \forall x \in S$ 显然 $\forall t \in [0,1], 1 \in f_t$.

5.6.21 定理　f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群当且仅当 $\forall x \in S$, 如果 $f(x) \neq 0$, 则存在 $\lambda = f(x) \in (0,1]$ 和 $e \in E(S)\cap f_\lambda$ 使得 $xf'_\lambda = ef_\lambda$.

证　假设 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群，则对任意 $t \in (0,1]$, 只要 $f_t \neq \emptyset$, f_t 是 S 的正则子半群. 对 $\forall x \in S$, 如果 $f(x) = t_0 \neq 0$, 则 $x \in f_{t_0}$, 且 f_{t_0} 是正则子半群. 根据定理 [142], 存在 $e \in f_t \cap E(S)$ 使得 $xf'_t = ef_t$.

反之，假设 $\forall x \in S$, 如果 $f(x) \neq 0$, 则存在 $\lambda \in (0,1]$ 和 $e \in E(S)\cap f_\lambda$ 使得 $xf'_\lambda = ef_\lambda$, $\lambda = f(x) \neq 0$. 要证 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群，只要证 $\forall \lambda \in (0,1]$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, f_λ 是 S 的正则子半群. 事实上，如果 $f_\lambda \neq \emptyset$, 则 $\forall x \in f_\lambda$, $f(x) \geqslant \lambda$. 取 $\lambda_0 = f(x)$. 由假设存在 $e \in E(S)\cap f_{\lambda_0}$ 使得 $xf'_{\lambda_0} = ef_{\lambda_0}$, 因此存在 $y \in f_{\lambda_0}$ 使得 $x = ey$, 存在 $z \in f'_{\lambda_0}$ 使得 $xz = e$. $ex = e^2y = ey = x \Rightarrow xzx = x, z \in R_x$, $f(z) \geqslant \lambda_0 \geqslant \lambda \Rightarrow z \in f_\lambda$. 结果 $(\forall x \in f_\lambda)$ $(\exists z \in R_x)$ $z \in f_\lambda$, 即 f_λ 是 S 的正则子半群. 证毕. □

5.7　Fuzzy 弱正则和完全正则半群

本节我们讨论 Fuzzy 弱正则子半群，Fuzzy 完全正则子半群和 Fuzzy 弱完全正则子半群.

5.7.1 定义　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群，如果对任意的 $x \in S$, 只要 $f(x) \neq 0$, 且 $\forall x \in S, R_x \neq \emptyset$, $\sup_{x'\in R_x} f(x') \geqslant f(x)$, f 称是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群.

5.7.2 定义　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群，如果对任意的 $x \in S$, 只要 $f(x) \neq 0$, 存在 $x^* \in R_x \cap C_x$ 使得 $f(x^*) \geqslant f(x)$, f 称是 S 的 Fuzzy 完全正则子半群.

5.7.3 定义　设 f 是 S 的 Fuzzy 子半群，如果对任意的 $x \in S$, 只要 $f(x) \neq 0$, 且 $\forall x \in S, R_x \cap C_x \neq \emptyset$, $\sup_{x^*\in R_x\cap C_x} f(x^*) \geqslant f(x)$, f 称是 S 的 Fuzzy 弱完全正则

子半群.

5.7.4 定理　设 S 为半群，$f \in F(S)$. 则下列各款等价：

(1) f 为 S 的 Fuzzy 弱正则子半群；

(2) 对任意 $\lambda \in [0,1)$, 如果 $f_\lambda^> \neq \emptyset$, 则 $f_\lambda^>$ 是 S 的正则子半群.

证　假设 f 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群. 因为 f 是 S 的 Fuzzy 子半群当且仅当对任意 $\lambda \in (0,1]$, 假设 $f_\lambda^> \neq \emptyset$, 则 $f_\lambda^>$ 是 S 的子半群. 因此我们仅需证明 $f_\lambda^>$ 是正则的就足够了. 任取 $x \in f_\lambda^>$, $f(x) > 0$, $\sup_{x' \in R_x} f(x') \geqslant f(x)$, 存在 $x' \in R_x$ 使得 $f(x') \geqslant f(x) > \lambda$. 因此 $x' \in f_\lambda^>$. 故 $f_\lambda^>$ 是 S 的正则子半群.

反之, 对任意 $\lambda \in (0,1]$, 如果 $f_\lambda^> \neq \emptyset$, $f_\lambda^>$ 是 S 的正则子半群. 但是 (1) 不成立, 存在 $x_0 \in S$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, $\sup_{x_0' \in R_{x_0}} f(x_0') < f(x_0)$, 取 $\lambda_0 \in (\sup_{x_0' \in R_{x_0}} f(x_0'), f(x_0))$. 则 $x_0 \in f_{\lambda_0}^>$, 但 $\forall x_0' \in R_{x_0}, f(x_0') < \lambda_0, x_0' \notin f_{\lambda_0}^>$. 和 $f_{\lambda_0}^>$ 的正则性矛盾. 证毕.　□

类似地可以证明

5.7.5 定理　设 S 为半群，$f \in F(S)$. 则下列各款等价：

(1) f 为 S 的 Fuzzy 完全正则 (弱完全正则) 子半群；

(2) 对任意 $\lambda \in (0,1] (\lambda \in [0,1))$, 如果 $f_\lambda \neq \emptyset (f_\lambda^> \neq \emptyset)$, 则 f_λ $(f_\lambda^>)$ 是 S 的完全正则子半群.

5.7.6 定理　设 A 为 S 的非空子集. 则 A 是正则 (完全正则) 子半群当且仅当它的特征函数 f_A 是 S 的 Fuzzy 弱正则 (完全正则) 子半群.

5.7.7 定理　假设 φ 是半群 S 到半群 T 的满同态映射. 则

(1) 如果 μ 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群, 则 $\varphi(\mu)$ 是 T 的 Fuzzy 弱正则子半群；

(2) 如果 ν 是 T 的 Fuzzy 弱正则子半群, 则 $\varphi^{-1}(\nu)$ 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群.

证　(1) 我们仅需证明对任意的 $\lambda \in [0,1)$, 只要 $(\varphi(\mu))_\lambda^> \neq \emptyset$, $(\varphi(\mu))_\lambda^>$ 是 T 的正则子半群. 反之, 如果存在 $\lambda_0 \in [0,1)$, $(\varphi(\mu))_{\lambda_0}^> \neq \emptyset$, 但是 $(\varphi(\mu))_{\lambda_0}^>$ 不是 T 的正则子半群. 存在 $t \in (\varphi(\mu))_{\lambda_0}^>$ 使得 $\forall t' \in R_t$, $t' \notin (\varphi(\mu))_{\lambda_0}^>$, 即 $(\varphi(\mu))(t) > \lambda_0$, 且 $\forall t' \in R_t$, $(\varphi(\mu))(t') \leqslant \lambda_0$, $\sup_{y \in \varphi^{-1}(t)} \mu(y) > \lambda_0$, $\sup_{z \in \varphi^{-1}(t')} \mu(z) \leqslant \lambda_0$ 这意味着存在 $y_0 \in S$ 使得 $\varphi(y_0) = t$, 且 $\mu(y_0) > \lambda$, 即 $y_0 \in \mu_{\lambda_0}^>, \mu_{\lambda_0}^> \neq \emptyset$. 对任意 $z \in St' \in R_t$, 如果 $\varphi(z) = t'$, 则 $\mu(z) < \lambda_0 \Rightarrow z \notin \mu_{\lambda_0}$. 显然 $(\forall y_0' \in R_{y_0})$ $y_0 y_0' y_0 = y_0 \Rightarrow t\varphi(y_0')t = t \Rightarrow \varphi(y_0') \in R_t$. 因此 $y_0' \notin \mu_\lambda^>$, 即 $\mu_\lambda^>$ 是非正则的, 矛盾.

(2) 假设 $\nu \in F(T)$ 是 T 的 Fuzzy 弱正则子半群. 根据定理 5.6.5, 对任意 $t \in (0,1]$, $\nu_t^>$ 是 S 的正则子半群. 由引理 5.6.17, $(\varphi^{-1}(\nu_t^>)) = (\varphi^{-1}(\nu))_t^>$ 是 S 的正则子半群, 再根据定理 5.7.4, $\varphi^{-1}(\nu)$ 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群. 证毕.　□

5.7.8 定理　假设 φ 是半群 S 到半群 T 的满同态映射. 则

(1) 如果 μ 是 S 的 Fuzzy 完全正则 (弱完全正则) 子半群, 则 $\varphi(\mu)$ 是 T 的

Fuzzy 完全正则 (弱完全正则) 子半群;

(2) 如果 ν 是 T 的 Fuzzy 完全正则 (弱完全正则) 子半群, 则 $\varphi^{-1}(\nu)$ 是 S 的 Fuzzy 完全正则 (弱完全正则) 子半群.

5.7.9 性质 (1) 半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群 $\Rightarrow f$ 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群;

(2) 如果 S 的 Fuzzy 子半群 f 有上确界性质, 则 f 是 S 的 Fuzzy 正则子半群 $\Leftrightarrow f$ 是 S 的 Fuzzy 弱正则子半群.

5.7.10 性质 (1) 半群 S 的一个 Fuzzy 子集 f 是 S 的 Fuzzy 完全正则子半群 $\Rightarrow f$ 是 S 的 Fuzzy 弱完全正则子半群;

(2) 如果 S 的 Fuzzy 子半群 f 有上确界性质, 则 f 是 S 的 Fuzzy 完全正则子半群 $\Leftrightarrow f$ 是 S 的 Fuzzy 弱完全正则子半群.

5.7.11 定理 设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 则 f 是 Fuzzy 弱正则的当且仅当 $(\forall x \in S)\ (f(x) \neq \emptyset)\ \ \sup_{x' \in R_x} f(x'xx') \geqslant f(x)$.

证 设 f 为 S 的 Fuzzy 弱正则子半群. 则

$$
\begin{aligned}
\sup_{x' \in R_x} f(x'xx') &\geqslant \sup_{x' \in R_x} \min\{f(x'), f(x)\} \\
&= \min\left(\sup_{x' \in R_x} f(x'), f(x)\right) \geqslant \min\{f(x), f(x)\} = f(x).
\end{aligned}
$$

反之, 如果 $(\forall x \in S)\ (f(x) \neq \emptyset)\ \ \sup_{x' \in R_x} f(x'xx') \geqslant f(x)$ 成立, 则 $\forall x' \in R_x, x'xx' \in R_x$, 且 $\sup_{x' \in R_x} f(x') \sup_{x' \in R_x} f(x'xx') \geqslant f(x)$. 证毕. □

5.7.12 定义 设 f 为 S 的 Fuzzy 子集. 对任意的 $x, y \in S$, 定义 $x \circ f \circ y$ ($x \circ f$, $f \circ y$) 分别为 S 的 Fuzzy 子集,

$$
(\forall z \in S)\ \ x \circ f \circ y(z) = \begin{cases} \sup_{z = xsy, s \in S} f(s), & \text{如果存在 } s \text{ 使得 } z = xsy; \\ 0, & \text{如果不存在 } s \text{ 使得 } z = xsy. \end{cases}
$$

$$
(\forall z \in S)\ \ x \circ f(z) = \begin{cases} \sup_{z = xs, s \in S} f(s), & \text{如果存在 } s \text{ 使得 } z = xs; \\ 0, & \text{如果不存在 } s \text{ 使得 } z = xs. \end{cases}
$$

$$
(\forall z \in S)\ \ f \circ y(z) = \begin{cases} \sup_{z = sy, s \in S} f(s), & \text{如果存在 } s \text{ 使得 } z = sy; \\ 0, & \text{如果不存在 } s \text{ 使得 } z = sy. \end{cases}
$$

5.7.13 注 定义 5.7.12 中, S 中元素 x, y 和 S 中的 Fuzzy 子集 f 的乘法事实上就是 Fuzzy 点 x_1, y_1 和 Fuzzy 子集的乘法 $x_1 \circ f \circ y_1$ ($x_1 \circ f$, $f \circ y_1$).

5.7.14 定理 设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 则 f 是 Fuzzy 弱正则的当且仅当

$$
(\forall x \in S)\ (f(x) \neq \emptyset)\ \ (x \circ f \circ x)(x) \geqslant f(x).
$$

证　从定义 5.7.1 和定义 5.7.12 容易看出. 证毕. □

5.7.15 推论　设 A 为 S 的子半群. 则 A 是正则的当且仅当 $(\forall x \in S) x \in xAx$.

5.7.16 定理　设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 则 f 是 Fuzzy 弱完全正则的当且仅当

$$(\forall x \in S)\ (f(x) \neq \emptyset)\ \ (x^2 \circ f \circ x^2)(x) \geqslant f(x).$$

证　假设 f 是弱完全正则的, 则当 $f(x) \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
f(x) &\leqslant \sup_{x^* \in R_x \cap C_x} f(x^*) = \sup_{xx^*x = x, xx^* = x*x, x^* \in S} f(x^*) \\
&= \sup_{xx^*xx^*xx^*x = x, xx^* = x^*x, x^* \in S} f(x^*) = \sup_{x^2x^{*3}x^2 = x, xx^* = x*x, x^* \in S} f(x^*) \\
&\leqslant \sup_{x^2x^{*3}x^2 = x, xx^* = x*x, x^* \in S} f(x^{*3}) \leqslant \sup_{x^2zx^2 = x, z \in S} f(z) \\
&= (x^2 \circ f \circ x^2)(x).
\end{aligned}$$

反之假设 $\forall x \in S, f(x) \neq 0, (x^2 \circ f \circ x^2)(x) \geqslant f(x)$. 则 $\sup_{x^2zx^2 = x, z \in S} f(z) \leqslant f(x)$. 假设 f 不是 Fuzzy 弱正则, 则 $(\exists x_0 \in S, f(x_0) \neq 0)$ $\sup_{x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}} f(x_0^*) < f(x_0)$. 设 $\lambda \in (0, 1], \sup_{x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}} f(x_0^*) < \lambda < f(x_0)$. 则 $\forall x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}, f(x^*) < \lambda < f(x)$. 假设 ${x_0}^2 z {x_0}^2 = x_0$, 记 $x_0' = x_0 z x_0$. 显然 $x_0' \in R_{x_0} \cap C_{x_0}$, 且

$$f(x_0') < \lambda < f(x_0), \quad f(x_0') = f(x_0 z x_0) \leqslant \min\{f(z), f(x_0)\}, \quad f(z) < x < f(x_0).$$

综上所述, $\sup_{x_0^2 z x_0^2 = x, z \in S} f(z) \leqslant \lambda < f(x_0)$. 矛盾. 证毕. □

5.7.17 定理　设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群. 则 f 是 Fuzzy 弱完全正则的当且仅当

$$(\forall x \in S)\ (f(x) \neq \emptyset)\ \ (x^2 \circ f \cap f \circ x^2)(x) \geqslant f(x).$$

证　假设 f 是弱完全正则的, 则 $\sup_{x^* \in R_x \cap C_x} f(x^*) \geqslant f(x)$, 且

$$\begin{aligned}
(x^2 \circ f)(x) &= \sup_{x^2 = x, z \in S} f(z) \geqslant \sup_{x^2 z = x, xz = zx, z \in S} f(z) \\
&= \sup_{z \in R_x \cap C_x} f(z) \leqslant f(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

相似地, $(f \circ x^2)(x) \geqslant f(x)$, 因此 $(x^2 \circ f \cap f \circ x^2)(x) \geqslant f(x)$.

反之假设 $\forall x \in S, f(x) \neq 0, (x^2 \circ f \circ x^2)(x) \geqslant f(x)$. 假设 f 不是 Fuzzy 弱正则, 则

$$(\exists x_0 \in S, f(x_0) \neq 0) \quad \sup_{x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}} f(x_0^*) < f(x_0).$$

设 $\lambda \in (\sup_{x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}} f(x_0^*), f(x_0))$. 则 $\forall x_0^* \in R_{x_0} \cap C_{x_0}, f(x^*) < \lambda < f(x_0)$. 假设 $x_0^2 z = x_0, t x_0^2 = x_0$ 记 $x_0' = z x_0 t$. 显然 $x_0' \in R_{x_0} \cap C_{x_0}$, 且

$$f(x_0') < \lambda < f(x_0), \quad f(x_0') = f(z x_0 t) \leqslant \min\{f(z), f(x_0), f(t)\}.$$

所以 $f(z)<\lambda, f(t)<\lambda f(x_0)$. 综上所述,

$$
\begin{aligned}
(x_0^2\circ f\cap f\circ x_0^2)(x) &= \min\Big(\sup_{x_0^2 z=x_0, z\in S} f(z), \sup_{x_0^2 t=x_0, t\in S} f(t)\Big)\\
&= \sup_{x_0^2 z=x_0, tx_0^2=x_0, z,t\in S} \min\{f(z), f(t)\}\\
&\leqslant \sup_{x_0^2 z=x_0, tx_0^2=x_0, z,t\in S} \min\{\lambda, f(z)(\text{或} f(t))\}\leqslant \lambda < f(x_0).
\end{aligned}
$$

矛盾. 证毕. □

5.7.18 推论　设 A 为 S 的子半群. 则 A 是完全正则的当且仅当 $(\forall x\in S)x\in x^2Ax^2$ 当且仅当 $(\forall x\in S)x\in x^2A\cap Ax^2$.

5.7.19 练习　*设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群, a_λ 为 Fuzzy 点且 $a_\lambda\in f$. 则*

(1) $a_\lambda\subseteq a_\lambda\circ f\subseteq a_\lambda\circ f^2\subseteq\cdots\subseteq a_\lambda\circ f^n\subseteq\cdots\subseteq f$;

(2) $a_\lambda\circ f=a_\lambda\circ f^2$.

5.7.20 练习　*设 f 为 S 的 Fuzzy 子半群, a_λ 为 Fuzzy 点且 $a_\lambda\in f$. 则存在 S 的 Fuzzy 幂等元素 $e_\lambda, \bar{e}_\mu\in f$ 使得*

(1) $a_\lambda\cup f\circ a_\lambda=e_\lambda\cup f\circ e_\lambda$;　(2) $a_\lambda\cup a_\lambda\circ f=\bar{e}_\mu\cup\bar{e}_\mu\circ f$.

5.8 评　述

1980 年左右, Kuroki[31~33] 就给出了 Fuzzy 子半群和 Fuzzy 理想, Fuzzy 双理想的定义. 这些概念均为一般子半群, 理想等概念的推广. 1993 年, Kuroki[34] 又引入 Fuzzy 拟理想的概念. 有了这些准备后, 本章给出了半群 S 是正则的, 内禀正则的, 完全正则的等刻画. 这些结果都是在匈牙利数学家 S. Lajos 关于纯半群的研究结果 [59~64] 基础上得出的. 我们也注意到半群的 Fuzzy 素理想对半群结构的影响也是深远的. 1992 年, Wang, Mo 和 Liu[61] 仿照逆半群的刻画, 给出了一个 Fuzzy 逆子半群的刻画. 值得提出的是他们对 Fuzzy 系统的点化描述使我们更清晰地认识到 Fuzzy 系统的本质.

第 6 章　Fuzzy 同余理论

本章系统研究半群上的 Fuzzy 同余，用 Fuzzy 同余的刻画一类半群的结构. 应该说这一些思想我们在半群的一般同余理论中也能找到相类似的结论.

6.1　半群的 Fuzzy 同余

本节给出半群上 Fuzzy 同余的基本概念和基本性质，为本章的以后各节做一定的准备.

设 ρ 是半群 S 上的 Fuzzy 二元关系. ρ 称为 Fuzzy **左相容**的，如果 $\rho(xa, xb) \geqslant \rho(a, b), \forall x, a, b \in S$. 对称地，$\rho$ 称为 Fuzzy **右相容**的，如果 $\rho(ax, bx) \geqslant \rho(a, b), \forall x, a, b \in S$. 如果 ρ 既是 Fuzzy 左相容又是 Fuzzy 右相容，称 ρ 是 Fuzzy **相容**的. 如果 ρ 是半群 S 上 Fuzzy 相容的 Fuzzy 等价关系，称 ρ 是 S 上的 Fuzzy **同余**. 半群 S 上的所有 Fuzzy 同余全体记为 $FC(S)$.

6.1.1 引理　设 R 为半群上的二元关系. 则 R 是左相容的当且仅当 f_R 是 Fuzzy 左相容的.

证　假设 R 是左相容的. 对任意的 $a, b, x \in S$, 如果 $(a, b) \in R$, 则 $(xa, xb) \in R$. 因此 $f_R(xa, xb) = 1 = f_R(a, b)$. 如果 $(a, b) \notin R$, 显然 $f_R(xa, xb) \geqslant 0 = f_R(a, b)$.

反之，假设 $(a, b) \in R$. 对任意 $x \in R$, 因为 $f_R(xa, xb) \geqslant f_R(a, b) = 1$. 所以 $f_R(xa, xb) = 1$, 即 $(xa, xb) \in R$. 证毕. □

对称地我们可以证明 R 是右相容的当且仅当 f_R 是 Fuzzy 右相容的.

6.1.2 定理　半群 S 上的 Fuzzy 二元关系 ρ 是 Fuzzy 同余当且仅当 ρ 是 S 上的 Fuzzy 等价关系且 $\rho(ac, bd) \geqslant \min\{\rho(a, b), \rho(c, d)\}$, $\forall a, b, c, d \in S$.

证　假设 ρ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则

$$
\begin{aligned}
(\forall a, b, c, d \in S)\ \rho(ac, bd) &\geqslant \rho \circ \rho(ac, bd) \\
&\geqslant \sup_{x \in S}[\min\{\rho(ac, x), \rho(x, bd)\}] \\
&\geqslant \min\{\rho(ac, bc), \rho(bc, bd)\} \geqslant \min\{\rho(a, b), \rho(b, c)\}.
\end{aligned}
$$

反之，从 $\rho(xa, xb)(\rho(ax, bx)) \geqslant \min\{\rho(x, x), \rho(a, b)\} \geqslant \min\{1, \rho(a, b)\} = \rho(a, b)$, 可以看出 ρ 是 Fuzzy 右相容的. 证毕. □

我们知道集合 X 上的二元关系 R 是等价关系当且仅当它的特征函数是 X 上的 Fuzzy 等价关系. 根据这一事实和引理 6.1.1, 我们有

6.1.3 定理　半群 S 上的 R 是同余关系当且仅当 f_R 是 S 上的 Fuzzy 同余关系.

6.1.4 练习　(1) 假设 ρ 是 Fuzzy 相容的 (同余), 则 ρ 的任意 t- 截集 $F_t, t \in [0,1]$ 是 S 上的相容关系 (同余关系);

(2) 如果 ρ, θ 是半群 S 上的 Fuzzy 自反关系，则 $\rho\circ\theta$ 也是.

6.1.5 定理　如果 ρ, θ 是半群 S 上的 Fuzzy 相容关系，则 $\rho\circ\theta$ 也是.

证　对任意 $a, b, x \in S$, 因为

$$\begin{aligned}\rho\circ\theta(xa, xb) &\geqslant \sup_{z\in S}[\min\{\rho(xa, z), \theta(z, xb)\}]\\ &\geqslant \min\{\rho(xa, xz), \theta(xz, xb)\} \geqslant \min\{\rho(a, z), \theta(z, b)\}\\ \Rightarrow \rho\circ\theta(xa, xb) &\geqslant \sup_{z\in S}[\min\{\rho(a, z), \theta(z, b)\}]\\ &= (\rho\circ\theta)(a, b).\end{aligned}$$

以上证明了 $\rho\circ\theta$ 是 Fuzzy 左相容的，同理可以证明 $\rho\circ\theta$ 是 Fuzzy 右相容的．证毕.　□

6.1.6 定理　假设 ρ, θ 是 S 上的 Fuzzy 同余．则下列各款等价：

(1) $\rho\circ\theta$ 是 S 的 Fuzzy 同余;

(2) $\rho\circ\theta$ 是 S 的 Fuzzy 等价关系;

(3) $\rho\circ\theta$ 是 S 的 Fuzzy 对称的;

(4) $\rho\circ\theta = \theta\circ\rho$.

证　(1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 任取 $(a, b) \in S\times S$. 因为 ρ 和 θ 是 Fuzzy 对称的，所以

$$\begin{aligned}\rho\circ\theta(a, b) &= \sup_{z\in S}[\min\{\rho(a, z), \theta(z, b)\}]\\ &= \sup_{z\in S}\min\{\theta(b, z), \rho(z, a)\} = (\theta\circ\rho)(b, a) = (\rho\circ\theta)(a, b).\end{aligned}$$

(4) $\Longrightarrow$ (1). 因为 ρ, θ 均为 Fuzzy 可传的．因此

$$\begin{aligned}(\rho\circ\theta)\circ(\rho\circ\theta) &= \{\rho\circ(\theta\circ\rho)\}\circ\theta = \{\rho\circ(\rho\circ\theta)\}\circ\theta\\ &= (\rho\circ\rho)\circ(\theta\circ\theta) \subseteq \rho\circ\theta.\end{aligned}$$

这意味着 $\rho\circ\theta$ 是 Fuzzy 可传的．根据练习 6.1.4 和定理 6.1.5, 下面我们仅需证明 $\rho\circ\theta$ 是 Fuzzy 对称的．事实上：

$$\begin{aligned}(\rho\circ\theta)(a, b) &= (\theta\circ\rho)(a, b) = \sup_{z\in S}[\min\{\theta(a, z), \rho(z, b)\}]\\ &= \sup_{z\in S}[\min\{\rho(z, b), \theta(a, z)\}] = \sup_{z\in S}[\min\{\rho(b, z), \theta(z, a)\}]\\ &= (\rho\circ\theta)(b, a).\end{aligned}$$

证毕. □

我们在第 1 章已经讨论了集合 X 上的 Fuzzy 二元关系生成 X 上 Fuzzy 等价关系以及 X 上 Fuzzy 等价关系格. 作为这些内容的继续, 我们现在讨论半群 S 上 Fuzzy 二元关系生成 θ 上 Fuzzy 同余关系以及 S 上 Fuzzy 同余格.

假设 θ 是半群 S 上的 Fuzzy 二元关系, 我们定义 S 上的新的 Fuzzy 二元关系 θ^* 如下: $\theta^*(c,d) := \bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}\theta(a,b)$, $\forall c,d\in S$.

6.1.7 定理　假设 ρ,θ 是半群 S 上的 Fuzzy 二元关系. 则下列各款成立:

(1) $\theta\leqslant\theta^*$;

(2) $(\theta^*)^{-1}=(\theta^{-1})^*$;

(3) $\theta\leqslant\rho\Rightarrow\theta^*\leqslant\rho^*$;

(4) $\theta^*=(\theta^*)^*$;

(5) $(\theta\vee\rho)^*=\theta^*\vee\rho^*$;

(6) $\theta=\theta^*$ 当且仅当 θ 是 Fuzzy 左 (右) 相容的.

证　(1),(2) 和 (3) 是显然的. 从 (1) 我们容易看出 $\theta^*\leqslant(\theta^*)^*$. 反之, 对任意 $c,d\in S$,

$$
\begin{aligned}
(\theta^*)^*(c,d) &= \bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}\theta^*(a,b) = \bigvee_{xz,ty\in S^1, xay=c, xby=d}\ \bigvee_{z,t\in S^1, zpt=a, zqt=b}\theta(p,q)\\
&\leqslant \bigvee_{z,t\in S^1, xzpty=c, xzqty=d}\theta(p,q)=\theta^*(c,d).
\end{aligned}
$$

因此 (4) 成立. 根据 (3), 因为 $\theta^*\leqslant(\theta\vee\rho)^*, \rho^*\leqslant(\theta\vee\rho)^*$, 所以 $\theta^*\vee\rho^*\leqslant(\theta\vee\rho)^*$. 反之,

$$
\begin{aligned}
(\theta\vee\rho)^*(c,d) &= \bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}(\theta\vee\rho)(a,b)\\
&\leqslant \bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}\theta(a,b)\vee\bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}\rho(a,b)\\
&= \theta^*(c,d)\vee\rho^*(c,d).
\end{aligned}
$$

因此 (5) 成立. 为了证明 (6), 假设 $\theta^*=\theta$. 则对任意的 $c,d,e\in S$, $\theta(ec,ed)=\theta^*(ec,ed)=\bigvee_{x,y\in S^1, xay=ec, xby=ed}\theta(a,b)\geqslant\theta(c,d)$. 相似地, 我们可以证明 $\theta(ce,de)\geqslant\theta(c,d)$. 故 θ 是 Fuzzy 左 (右) 相容的. 反之, 假设 θ 是 Fuzzy 左 (右) 相容的. 因为 $\theta^*(c,d)=\bigvee_{x,y\in S^1, xay=c, xby=d}\theta(a,b)$, 所以 $\theta(a,b)\leqslant\theta(xay,xby)=\theta(c,d)$. 因此 $\theta^*(c,d)\leqslant\theta(c,d)$. 又因为 (1) 成立, 所以 $\theta=\theta^*$. 证毕. □

根据定理 6.1.5, 我们可以证明

6.1.8 练习　*假设 θ 是半群 S 上 Fuzzy 左 (右) 相容的 Fuzzy 二元关系. 则 θ^∞ 在 S 上也是 Fuzzy 左 (右) 相容的.*

假设 θ 是半群 S 上的 Fuzzy 二元关系，$\{\theta_i:\ \theta\leqslant\theta_i, i\in I\}$ 是 S 的包含 θ 的 Fuzzy 同余簇. 则 $\hat\theta:=\bigwedge_{i\in I,\theta\leqslant\theta_i}\theta_i$ 是 S 的包含 θ 的最小 Fuzzy 同余，$\hat\theta$ 称为 θ 生成的 Fuzzy 同余.

6.1.9 定理 假设 θ 是半群 S 上的 Fuzzy 二元关系. 则 $\hat\theta=(\theta^*)^e$.

证 根据定理 1.3.14, $(\theta^*)^e$ 是 S 的包含 θ^* 的最小的 Fuzzy 等价关系，当然 $\theta\subseteq(\theta^*)^e$. 根据练习 6.1.8, 要证 $(\theta^*)^e$ 是 Fuzzy 相容的，仅需证明 $\theta^*\vee(\theta^*)^{-1}\vee\triangle_S=(\theta\vee\theta^{-1}\vee\triangle_S)^*$ 是 Fuzzy 相容的，根据定理 6.1.7, $(\theta^*)^e=(\theta^*\vee\theta^*)^{-1}\vee\triangle_S)^\infty$ 是 Fuzzy 相容的. 进一步地，假定 $\rho\in FC(S),\theta\leqslant\rho$. 则 $\theta^*\leqslant\rho^*=\rho\Rightarrow(\theta^*)^e\leqslant\rho$. 证毕. □

在第 1 章我们已经知道对半群 S, $(FE(S),\leqslant)$ 是一个完备格，且最大元为 ∇_S, 最小元为 $\triangle_S$. 因此 $(FC(S),\leqslant)$ 是 $(FE(S),\leqslant)$ 的子格，且格 $(FE(S),\leqslant)$ 上的两个运算为 "$\bullet$" 和 "+", 定义为：$(\forall\theta,\rho\in FE(S))$ $\theta+\rho=(\theta\vee\rho)^e$, $\theta\bullet\rho=\theta\wedge\rho$. 我们也注意到如果 $\theta,\rho\in FC(S)$, 则包含在 θ,ρ 中的 S 的最大的 Fuzzy 同余就是 $\rho\wedge\theta$, 包含 θ,ρ 的 S 的最小 Fuzzy 同余就是 θ,ρ 在 S 中生成的 Fuzzy 同余，即 $\rho+\theta=[(\rho\vee\theta)^*]^e=(\theta\vee\rho)^e$. 下面我们给出 $FC(S)$ 中加法的另外一种描述.

6.1.10 定理 假设 ρ,θ 是半群 S 上的 Fuzzy 同余. 则 $\theta+\rho=(\theta\circ\rho)^\infty=(\rho\circ\theta)^\infty$.

证 我们知道 $\theta+\rho=(\theta\vee\rho)^e=[(\theta\vee\rho)\vee(\theta\vee\rho)^{-1}\vee\triangle_S]^\infty$. 因为 $\rho,\theta\in FC(S)$, 所以 $[(\theta\vee\rho)\vee(\theta\vee\rho)^{-1}\vee\triangle_S]^\infty=(\rho\vee\theta)^\infty$. 因为 $\theta,\rho\leqslant\theta\vee\rho$, 所以 $\theta\circ\rho\leqslant(\theta\vee\rho)^2\Rightarrow(\theta\circ\rho)^\infty\leqslant[(\theta\vee\rho)^2]^\infty\leqslant(\theta\vee\rho)^\infty$. 另一方面，因为 $\theta\leqslant\theta\circ\rho,\rho\leqslant\theta\circ\rho$, 所以 $\theta\vee\rho\leqslant\theta\circ\rho$. 故 $(\theta\vee\rho)^\infty\leqslant(\theta\circ\rho)^\infty$. 以上完成了 $\theta+\rho=(\theta\circ\rho)^\infty$ 的证明. 类似可证 $\theta+\rho=(\rho\circ\theta)^\infty$. 证毕. □

根据定理 1.3.13, 我们不难得出下列推论.

6.1.11 推论 假设 ρ,θ 是半群 S 上的 Fuzzy 同余且 $\theta\circ\rho=\rho\circ\theta$. 则 $\theta+\rho=\theta\circ\rho$.

6.2 Fuzzy 群同余格

本节假设 G 是群，我们将用 G 上 Fuzzy 正规子群来刻画 G 上的 Fuzzy 同余.

假设 G 是群，G 的一个 Fuzzy 子集 f 称为 G 的 Fuzzy *子群*, 如果 (1) $f(xy)\geqslant\min\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in S$; (2) $f(x)=f(x^{-1}),\forall x\in G$. (3) $f(e)=1$, 这里 e 是 G 的单位元. G 的 Fuzzy 子群称为 G 的 Fuzzy *正规子群*, 如果 $f(xy)=f(yx),\forall x,y\in S$.

下面两个引理容易证明.

6.2.1 引理 假设 ρ 是群 G 上的 Fuzzy 同余. 则对任意的 $a,b,x,y\in S$, $\rho(xay,xby)=\rho(xa,xb)=\rho(ay,by)=\rho(a,b)$.

6.2.2 引理 假设 ρ 是群 G 上的 Fuzzy 同余. 则 $\rho(x^{-1},y^{-1})=\rho(x,y),\forall x,y\in S$.

6.2.3 定理　假设 f 是群 G 的 Fuzzy 正规子群. 则 Fuzzy 二元关系 α_f 是 G 上的 Fuzzy 同余关系, 其中 α_f 定义如下: $\alpha_f(a,b) := f(ab^{-1}), \forall a,b \in S$.

证　我们不难看出 α_f 是 G 上的 Fuzzy 自反, Fuzzy 对称和 Fuzzy 相容的. 因为

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in G}[\min\{\alpha_f(a,x),\alpha_f(x,b)\}]\\
=\ &\sup_{x\in G}[\min\{f(ax^{-1}, f(xb^{-1})\}]\\
\leqslant\ &\sup_{x\in G}[f(ax^{-1})f(xb^{-1})] = f(ab^{-1}) = \alpha_f(a,b).
\end{aligned}$$

所以 α_f 是 Fuzzy 可传递的. 证毕. □

6.2.4 定理　假设 α 是群 G 上的 Fuzzy 同余. 则 G 的 Fuzzy 子集 f^α 是 G 的 Fuzzy 正规子群, 其中 f^α 定义如下: $f^\alpha(a) := \alpha(a,e), \forall a \in G$.

证　对任意的 $a,b \in G$. 因为 α 是 Fuzzy 可传递的, 所以

$$\begin{aligned}
f^\alpha(ab) &= \alpha(ab,e) = \alpha(a,b^{-1}) \geqslant \sup_{x\in G}[\min\{\alpha(a,x),\alpha(x,b^{-1})\}]\\
&\geqslant \min\{\alpha(a,e),\alpha(b,e)\} = \min\{\alpha(a,e),\alpha(b,e)\}\\
&= \min\{f^\alpha(a), f^\alpha(b)\},\\
f^\alpha(a^{-1}) &= \alpha(a^{-1},e) = \alpha(e,a) = \alpha(a,e) = f^\alpha(a),\\
f^\alpha(e) &= \alpha(e,e) = 1.
\end{aligned}$$

因此 f^α 是 G 的 Fuzzy 子群. 又因为 $f^\alpha(ab) = \alpha(ab,e) = \alpha(b(ab)b^{-1}, beb^{-1}) = \alpha(ba,e) = f^\alpha(ba), \forall a,b \in S$. 所以 f^α 是 G 的 Fuzzy 正规子群. 证毕. □

下面一组结论可以容易证明.

6.2.5 练习　*假设 f 是群 G 的 Fuzzy 子群. 则 $f \circ f = f$.*

6.2.6 练习　*假设 f,g 是群 G 的 Fuzzy 子群. 则 $f \circ g$ 是 G 的 Fuzzy 子群当且仅当 $f \circ g = g \circ f$.*

6.2.7 练习　*假设 f 群 G 的 Fuzzy 子集, g 是群 G 的 Fuzzy 正规子群. 则 $f \circ g = g \circ f$.*

6.2.8 练习　*假设 f 是群 G 的 Fuzzy 子群, g 是群 G 的 Fuzzy 正规子群. 则 $f \circ g$ 是 G 的 Fuzzy 子群.*

6.2.9 定理　假设 f,g 是群 G 的 Fuzzy 子群. 则 $\alpha_f \circ \alpha_g = \alpha_{f\circ g}$.

证　设 $(a,b) \in G \times G$, $z \in G$. 记 $az^{-1} = x, zb^{-1} = y$. 则 $xy = ab^{-1}$ 且

$$\begin{aligned}
(\alpha_f \circ \alpha_g)(a,b) &= \sup_{z\in G}[\min\{\alpha_f(a,z),\alpha_g(z,b)\}]\\
&= \sup_{z\in G}[\min\{f(az^{-1}), g(zb^{-1})\}] = \sup_{ab^{-1}=xy} \min\{f(x), f(y)\}
\end{aligned}$$

$$= (f \circ g)(ab^{-1}) = \alpha_{f \circ g}(a, b).$$

因此 $\alpha_f \circ \alpha_g = \alpha_{f \circ g}$. 证毕. □

6.2.10 定理　群 G 的 Fuzzy 同余格 $(FC(S), +, \bullet)$ 关于 Fuzzy 集的乘法构成半格.

证　设 ρ, θ 是群 G 上的两个 Fuzzy 同余, $(a, b) \in G \times G$. 则

$$\begin{aligned}(\rho \circ \theta)(a, b) &= \sup_{z \in G}[\min\{\rho(a, z), \theta(z, b)\}] \\ &= \sup_{z \in G}[\min\{\theta(e, z^{-1}b), \rho(az^{-1}, e)\}] \\ &= \sup_{az^{-1}b \in G}[\min\{\theta(a, az^{-1}b), \rho(az^{-1}b, b)\}] = (\theta \circ \rho)(a, b).\end{aligned}$$

因此 $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$. 根据定理 6.1.6, $\theta \circ \rho$ 是 G 的 Fuzzy 同余. 这样 $(FC(S), \circ)$ 是可换半群. 如果 ρ 是 G 上的 Fuzzy 同余, 显然 $\rho \circ \rho = \rho$. 故 $(FC(S), \circ)$ 是半格. 证毕. □

6.2.11 定理　假设 f, g 是群 G 的 Fuzzy 正规子群. 则 $f \circ g$ 也是 G 的 Fuzzy 正规子群.

证　我们已经知道 $f \circ g$ 是 G 的 Fuzzy 子群. 要证 $f \circ g$ 是 G 的 Fuzzy 正规子群, 仅需证明 $f \circ g(ab) = (f \circ g)(ba), \forall a, b \in G$. 事实上,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a, b) &= \sup_{ab = xy}[\min\{f(x), g(y)\}] \\ &= \sup_{ba = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya)}[\min\{f(a^{-1}xa), g(a^{-1}ya)\}] \\ &= (f \circ g)(ba).\end{aligned}$$

证毕. □

6.2.12 定理　群 G 的所有 Fuzzy 正规子群集 $FN(G)$ 关于 Fuzzy 子集的乘法构成半格.

证　在前面我们知道 $(FN(G), \circ)$ 是结合的, 又由定理 6.2.11, $(FN(G), \circ)$ 是半群. 在练习 6.2.5, 6.2.7 中已看出 $(FN(G), \circ)$ 是半格. 证毕. □

下面的定理是本节的主要结论.

6.2.13 定理　假设 G 是群. $FN(G)$ 是 G 的所有 Fuzzy 正规子群集, $FC(G)$ 是 G 的 Fuzzy 同余集. 则 $FN(G)$ 和 $FC(G)$ 之间存在一一对应.

证　假设 $\varphi : FN(G) \longrightarrow FC(G)$ 是映射, 定义如下: $\varphi(f) = \alpha_f \in FC(G)$, $\forall f \in FN(G)$. 根据定理 6.2.3, φ 的定义是合理的. 如果 $f = h$, 则 $\alpha_f(a, b) = f(ab^{-1}) = h(ab^{-1}) = \alpha_h(a, b), \forall (a, b) \in S \times S$. 因此 φ 是单的. 对于任意的 $\alpha \in FC(G)$, 根据定理 6.2.4, $f^\alpha \in FC(G)$. $\varphi(f^\alpha)(a, b) = \alpha_{f^\alpha}(a, b) = f^\alpha(ab^{-1}) = \alpha(ab^{-1}, e) = \alpha(a, b), \forall a, b \in G$. 因此 $\varphi(f^\alpha) = \alpha$, 即 φ 是满射. 证毕. □

6.2.14 注 在定理 6.2.13 中, φ 事实上也是半群 $(FN(G),\circ)$ 和半群 $(FC(G),\circ)$ 之间的同构映射.

6.2.15 定义 一个格 $(L,+,\bullet)$ 称为 模格, 如果对任意 $x,y,z\in L$,

$$x\leqslant z,\ \ (x+y)\bullet z\leqslant x+(y\bullet z).$$

6.2.16 定理 假设 S 是半群, H 是 $(FC(S),+,\bullet)$ 的子格且 $\rho\circ\theta=\theta\circ\rho,\forall\theta,\rho\in H$. 则 H 是模格.

证 设 $\theta,\rho,\gamma\in H$, $\theta\leqslant\gamma$. 我们仅需证明 $(\theta+\rho)\bullet\gamma\leqslant\theta+(\rho\bullet\gamma)$.

因为 $\theta\circ\rho=\rho\circ\theta,\theta,\rho\in H$. 根据推论 6.1.11, 仅需证明 $(\theta\circ\rho)\wedge\gamma\leqslant\theta\circ(\rho\wedge\gamma)$. 事实上,

$$\begin{aligned}[(\theta\circ\rho)\wedge\gamma](x,y) &= \sup_{z\in S}[\theta(x,z)\wedge\rho(z,y)\wedge\gamma(x,y)]\\ &= \sup_{z\in S}[\theta(x,z)\wedge\theta(x,z)\wedge\rho(z,y)\wedge\gamma(x,y)]\\ &\leqslant \sup_{z\in S}[\theta(x,z)\wedge\gamma(x,z)\wedge\rho(z,y)\wedge\gamma(x,y)]\\ &\leqslant \sup_{z\in S}[\theta(x,z)\wedge\gamma(z,y)\wedge\rho(z,y)\\ &= [\theta\circ(\rho\wedge\gamma)](x,y).\end{aligned}$$

证毕. □

6.2.17 推论 如果 G 是群, 则 $(FC(G),+,\bullet)$ 是模格.

6.3 Fuzzy 同态基本定理

本节建立基于 Fuzzy 同余的同态基本定理.

假设 μ 是半群 S 上的 Fuzzy 等价关系, $a\in S$. 我们定义 S 的一个 Fuzzy 子集 μ_a (我们也记为 $a\mu$): $\mu_a(x)=\mu(a,x),\forall x\in S$. 则

6.3.1 定理 设 μ 是半群 S 上的 Fuzzy 等价关系, $a,b\in S$. 则 $\mu_a=\mu_b$ 当且仅当 $\mu(a,b)=1$.

证 设 $\mu_a=\mu_b$. 因为 μ 是半群 S 上的 Fuzzy 等价关系, 所以 $\mu(a,b)=\mu_a(b)=\mu_b(b)=1$.

反之, 设 $\mu(a,b)=1$. 则对任意 $x\in S$,

$$\begin{aligned}\mu_a(x) &= \mu(a,x)\geqslant(\mu\circ\mu)(a,x)\\ &= \sup_{y\in S}[\min\{\mu(a,y),\mu(y,x)\}]\\ &\geqslant \min\{\mu(a,b),\mu(b,x)\}=\mu(b,x)=\mu_b(x).\end{aligned}$$

因此 $\mu_b \leqslant \mu_a$. 对称地，我们也能证明 $\mu_a \leqslant \mu_a$. 证毕. □

S 的 Fuzzy 子集 $\mu_a, \forall a \in S$ 称为 S 的包含 a 的 Fuzzy 等价类. 假设 μ 是 S 的 Fuzzy 同余， Fuzzy 子集 $\mu_a, \forall a \in S$ 称为 S 的包含 a 的 Fuzzy 同余类. 记 $S/\mu := \{\mu_a \mid a \in S\}$.

6.3.2 定理 设 S 是半群， μ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则对任意 $\mu_a, \mu_b \in S/\mu$, $\mu_a \circ \mu_b \leqslant \mu_{ab}$.

证 对任意 $x \in S$, 记 $S' := \{yb \mid y \in S, yz = x\}$. 则

$$\begin{aligned}(\mu_a \circ \mu_b)(x) &= \sup_{x=yz}[\min\{\mu_a(y), \mu_b(z)\}] = \sup_{x=yz}[\min\{\mu(a,y), \mu(b,z)\}] \\ &\leqslant \sup_{x=yz}[\min\{\mu(ab,yb), \mu(yb,yz)\}] = \sup_{t\in S'}[\min\{\mu(ab,t), \mu(t,x)\}] \\ &\leqslant \sup_{t\in S}[\min\{\mu(ab,t), \mu(t,x)\}] \\ &= (\mu_a \circ \mu_b)(ab,x) \leqslant \mu(ab,x) = \mu_{ab}(x).\end{aligned}$$

因此 $\mu_a \circ \mu_b \leqslant \mu_{ab}$. 证毕. □

如果 $\mu_a \circ \mu_b = \mu_{ab}$, 则 $(S/\mu, \circ)$ 是半群，这当然是较为完美的结论，遗憾的是一般情况下该结论并不成立，不过通过此给我们以启发定义 S/μ 上的二元运算 $*$: $\mu_a * \mu_b := \mu_{ab}, \forall \mu_a, \mu_b \in S$.

6.3.3 定理 设 S 是半群， μ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则对任意 $\mu_a, \mu_b \in S/\mu$, $\mu_a * \mu_b$ 是可定义的.

证 假设 $\mu_a = \mu_b$ 且 $\mu_c = \mu_d$. 则根据定理 6.3.1, $\mu(a,b) = \mu(c,d) = 1$. 由此推出

$$\begin{aligned}\mu(ac,bd) &\geqslant (\mu \circ \mu)(ac,bd) = \sup_{x\in S}[\min\{\mu(ac,x), \mu(x,bd)\}] \\ &\geqslant \min\{\mu(ac,bc), \mu(bc,bd)\} \geqslant \min\{\mu(a,c), \mu(c,b)\} = 1\end{aligned}$$

因此 $\mu(ac,bd) = 1$. 根据定理 6.3.1, $\mu_a * \mu_c = \mu_b * \mu_d = \mu_{ac} = \mu_{bd}$. 证毕. □

6.3.4 定理 设 S 是半群， μ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则 $\mu^{-1} = \{(a,b) \in S \times S \mid \mu(a,b) = 1\}$ 是 S 上的同余.

证 显然 μ^{-1} 是自反的和对称的. 设 $(a,b), (b,c) \in \mu^{-1}$. 则因为 $\mu(a,b) = \mu(b,c) = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\mu(a,c) &\geqslant (\mu \circ \mu)(a,c) = \sup_{x\in S}\min\{\mu(a,x), \mu(x,c)\} \\ &\geqslant \min\{\mu(a,b), \mu(b,c)\} = 1.\end{aligned}$$

因此 $(a,c) \in \mu^{-1}$. 故 μ^{-1} 是 S 上的等价关系. 假设 $(a,b) \in \mu^{-1}, x \in S$. 因为 μ 是 S 上的 Fuzzy 同余，所以 $\mu(ax,bx) \geqslant \mu(a,b) = 1$, 因此 $\mu(ax,bx) = 1 \Rightarrow (ax,bx) \in \mu^{-1}$. 类似地，可以推出 $(xa,bx) \in \mu^{-1}$. 证毕. □

下面我们讨论 Fuzzy 性和同态. 假设 S 和 T 是两个半群, φ 是 S 到 T 的 Fuzzy 同态. 我们知道 $\ker\varphi = \{a,b) \in S\times S \mid \varphi(a)=\varphi(b)\}$ 是 S 上的同余关系, 当然它的特征函数 $f_{\ker\varphi}$ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 为了方便此见, 我们记 $k(\varphi)=f_{\ker\varphi}$, 即当 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 时, $k(\varphi)(a,b)=1$, 否则 $k(\varphi(a,b)=0$.

6.3.5 定理　假设 μ 是半群 S 上的 Fuzzy 同余关系. 则 $(S/\mu,*)$ 是半群, 映射 $\mu^{\#}: S\hookrightarrow S/\mu \mid \mu^{\#}(a)=\mu_a, a\in S$ 是同态. 如果 φ 是半群 S 到半群 T 的同态, 则存在一个 $S/k(\varphi)$ 到 T 的同态 ψ 使得图 6.3.1 可换.

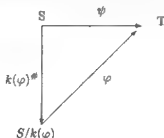


图 6.3.1

证　根据 S/μ 上二元运算 $*$ 的定义, $\mu^{\#}(ab)=\mu_{ab}=\mu_a*\mu_b=\mu^{\#}(a)*\mu^{\#}(b), \forall a,b\in S$. 现在我们定义映射 $\psi: S/k(\varphi)\hookrightarrow T$ 为 $\psi((k(\varphi))_a)=\varphi(a), \forall a\in S$.

(1) ψ 是可定义的. 事实上, 如果 $(k(\varphi))_a=(k(\varphi))_b, \forall a,b\in S$, 则根据定理 6.3.1, $k(\varphi)(a,b)=1$. 因此 $(a,b)\in\ker(\varphi)$. 故 $\psi((k(\varphi))_a)=\varphi(a)=\varphi(b)=\psi((k(\varphi))_b)$.

(2) ψ 是一一的. 假设 $\varphi(a)=\varphi(b)$. 则 $(a,b)\in\ker(\varphi)$. 因此 $k(\varphi)(a,b)=f_{\ker\varphi}(a,b)=1\Rightarrow(k(\varphi))_a=(k(\varphi))_b$.

(3) ψ 是同态. 对任意 $a,b\in S$, $\psi((k(\varphi))_a*(k(\varphi))_b)=\psi((k(\varphi))_{ab})=\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)=\psi((k(\varphi))_a)\psi((k(\varphi))_b)$.

(4) 图 6.3.1 是可换的. 事实上, 设 $a\in S$, $\psi(k(\varphi))^{\#}(a)=\psi((k(\varphi))_a)=\varphi(a)$. 因此 $\psi((k(\varphi))^{\#}=\varphi$. □

6.3.6 定理　假设 μ,ν 是半群 S 上的 Fuzzy 同余关系且 $\mu\leqslant\nu$. 则存在唯一同态 $\psi: S/\mu\hookrightarrow S/\nu$ 使得图 6.3.2 可换. 进一步地, $(S/\mu)/k(\psi)$ 和 S/ν 同构.

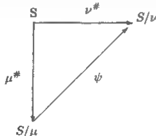


图 6.3.2

证　定义 ψ 如下：　$\psi : S/\mu \hookrightarrow S/\nu \mid \psi(\mu_a) = \nu_a, \forall a \in S$. 如果 $\mu_a = \mu_b$, 则 $\mu(a,b) = 1 \leqslant \nu(a,b) \Rightarrow \nu(a,b) = 1$. 因此 $\nu_a = nu_b$. 故 ψ 是可定义的. 其他部分容易证明，作为练习. 证毕. □

我们知道一个半群 S 的 Fuzzy 子集全体 $F(S)$ 和 S 的 Fuzzy 子半群全体 $F_s(S)$ 关于 Fuzzy 子集的乘法运算构成半群.

6.3.7 练习　*假设半群 S 和半群 T 同态，则半群 $F(S)$ 和半群 $F(T)$ 同态. 特别地，如果 S 和 T 同构，则 $F(S)$ 和 $F(T)$ 同构.*

6.3.8 练习　*假设 $\mu \in FC(S)$. 则 S/μ 和 S/μ^{-1} 同构.*

6.3.9 练习　*假设 $\mu, \nu \in FC(S)$, $\mu \leqslant \nu$. 定义 S/μ 上的 Fuzzy 关系 ν/μ 如下：$(\nu/\mu)(a\mu, b\mu) = \nu(a,b)$, $\forall a, b \in S$. 证明 ν/μ 是 S/μ 上的 Fuzzy 同余.*

6.4　Fuzzy Rees 同余

本节我们研究 Fuzzy Rees 同余和 Fuzzy Rees 同余半群.

6.4.1 定义　一个半群 S 除了 ∇_S 和 $\triangle_S$ 不再包含其他任何 Fuzzy 同余，S 称为 Fuzzy 同余自由的.

6.4.2 定义　半群 S 称为 Fuzzy 0- 单的，如果 $S^2 \neq \{0\}$ 且 0_S 和 S 是 S 仅有的 Fuzzy 理想.

设 μ 是半群 S 的 Fuzzy 理想. 通过 μ 我们定义 S 上的一个 Fuzzy 二元关系 θ_μ 如下：如果 $x \neq y$, $\theta_\mu(x,y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$; 如果 $x = y$, $\theta_\mu(x,x) = 1$. 对任意的 $(x,y) \in S \times S$, 不难验证 θ_μ 是可定义的，且

6.4.3 定理　设 μ 是半群 S 的 Fuzzy 理想. 则 θ_μ 是 S 上的 Fuzzy 同余.

证　由 θ_μ 的定义，显然 θ_μ 是自反的对称的. 进一步地，对任意 $x, y \in S$, $\theta_\mu \circ \theta_\mu(x,y) = \sup_{z \in S}(\theta_\mu(x,z) \wedge \theta_\mu(z,y))$.

如果 $x = y$, 则 $\theta_\mu \circ \theta_\mu(x,x) = \sup_{z \in S} \theta_\mu(x,z) \geqslant \theta_\mu(x,x) = 1$. 因此 $\theta_\mu \circ \theta_\mu(x,x) = \theta_\mu(x,x)$.

如果 $x \neq y$, 则

$$\begin{aligned}
\theta_\mu \circ \theta_\mu(x,y) &= \sup_{z \in S \ \{x,y\}} (\theta_\mu(x,z) \wedge \theta_\mu(y,z)) \\
&\quad (\theta_\mu(x,x) \wedge \theta_\mu(x,y) \vee (\theta_\mu(x,y) \wedge \theta_\mu(y,y)) \\
&= \theta_\mu(x,y) \vee \sup_{z \in S - \{x,y\}} (\mu(x) \wedge \mu(z) \wedge \mu(z) \wedge \mu(y)) \\
&\leqslant \theta_\mu(x,y) \vee \sup_{z \in S - \{x,y\}} (\mu(x) \wedge \mu(y)) \\
&= \theta_\mu(x,y) \vee \theta_\mu(x,y) = \theta_\mu(x,y).
\end{aligned}$$

因此 θ_μ 是传递的.

另一方面，对任意的 $x,y,c \in S$, 如果 $cx = cx$, 则 $\theta_\mu(cx,cy) = 1 \geqslant \theta_\mu(x,y)$. 如果 $cx \neq cy$. 则 $x \neq y$ 且 $\theta_\mu(cx,cy) = \mu(cx) \wedge \mu(cy) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) = \theta_\mu(x,y)$. 这意味着 θ_μ 是左相容. 同理我们可以证明 θ_μ 也是右相容. 证毕. □

S 中由 S 的一个非零 Fuzzy 理想 μ 决定的 Fuzzy 同余 θ_μ(定义如上所述) 我们称之为 Fuzzy Rees 同余. 设 μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 记 $\overline{\text{supp}}\mu = \{x \in S : \mu(x) = 1\}$ 则 $\overline{\text{supp}}\mu$ 是 S 的理想. 类似于半群的 Rees 同余的相关结论，我们有

6.4.4 定理 设 μ 是半群 S 的 Fuzzy 理想. 设 $\mathcal{A}$ 是 S 的包含 $\overline{\text{supp}}\mu$ 的理想集，$\mathcal{B}$ 是商半群 S/θ_μ 的理想集. 则映射 $f:\ J \longmapsto J\theta_\mu (J \in \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 满的保序一一映射.

证 假设 J 是 S 的理想. 则容易看出 $J\theta_\mu$ 是半群 S/θ_μ 的理想. 设 $J_1, J_2 \in \mathcal{A}$ 且 $J_1 \neq J_2$. 则存在 $a \in S$ 使得 $a \in J_1 \backslash J_2$ 或 $a \in J_2 \backslash J_1$. 如果 $a \in J_1 \backslash J_2$, 则 $J_1\theta_\mu \neq J_2\theta_\mu$. 事实上，如果 $J_1\theta_\mu = J_2\theta_\mu$, 则存在 $b \in J_2$ 使得 $a\theta_\mu = b\theta_\mu$. 显然 $a \neq b$. 因此 $(a\theta_\mu)(b) = \theta_\mu(a,b) = \mu(a) \wedge \mu(b) = b\theta_\mu(b) = 1$. 故 $\mu(a) = \mu(b) = 1$, 即 $a \in \overline{\text{supp}}\mu \subseteq J_2$. 矛盾. 同理，如果 $a \in J_2 \backslash J_1$, 则也有 $J_1\theta_\mu \neq J_2\theta_\mu$. 因此 f 是单射.

设 $K\theta_\mu$ 是 S/θ_μ 的理想且 $K_1 = \{x \in S \mid x\theta_\mu \in K\theta_\mu\}$. 则对任意 $x \in K_1$, $(Sx)\theta_\mu = S\theta_\mu \circ x\theta_\mu \subseteq S\theta_\mu \circ K\theta_\mu \subseteq K\theta_\mu$, 即 $Sx \subseteq K_1$. 类似地，我们可证明 $xS \subseteq K_1$. 因此 K_1 是 S 的理想. 另一方面，对任意 $a \in \overline{\text{supp}}\mu$ 且 $x \in K_1$,

A) 如果 $a = ax$, 显然 $a \in K_1$.

B) 如果 $a \neq ax$, 对任意 $z \in S$, 分以下几种情形讨论：

1) 如果 $z \neq a, ax$, 则

$$
\begin{aligned}
(a\theta_\mu)(z) &= \theta_\mu(a,z) = \mu(a) \wedge \mu(z) \quad (\text{因为} \quad \mu(a) = 1) \\
&= \mu(ax) \wedge \mu(z) = ((ax)\theta_\mu)(z).
\end{aligned}
$$

2) 如果 $z = a$, 则 $(a\theta_\mu)(a) = 1 = \mu(a) \wedge \mu(z) = ((ax)\theta_\mu)(a)$

3) 如果 $z = ax$, 根据 2), $(a\theta_\mu)(ax) = ((ax)\theta_\mu)(ax)$.

因此 $(a\theta_\mu) = (ax)\theta_\mu \subseteq K\theta_\mu$, 即 $a \in K_1$. 故 K_1 是 S 的包含 $\overline{\text{supp}}\mu$ 的理想. 显然 $K_1\theta_\mu = K\theta_\mu$. 以上证得 f 是满的.

f 是保序的仅仅是简单的验证. 证毕. □

6.4.5 定理 设 S 是有零元的半群. 则映射 $g : \mu \longmapsto \theta_\mu \quad (\mu \in FI(S))$ 是从 $FI(S)$ 到 $FC(S)$ 的保序单射.

证 假设 $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$ 且 $\mu_1 \neq \mu_2$, 则存在 $x \in S$ 使得 $\mu_1(x) \neq \mu_2(x)$. 显然 $x \neq 0$ 因此

$$
\theta_{\mu_1}(x,0) = \mu_1(x) \wedge \mu_1(0) \quad \mu_1(x), \quad \theta_{\mu_2}(x,0) = \mu_2(x) \wedge \mu_2(0) - \mu_2(x).
$$

只有 $\theta_{\mu_1} \neq \theta_{\mu_2}$. g 是单射. g 是保序的显然. 证毕. □

6.4.6 定义　如果半群 S 的每个 Fuzzy 同余是 Fuzzy Rees 同余，则 S 称为 Fuzzy Rees 同余半群 (简称 FRC- 半群).

6.4.7 定理　设 S 是 FRC- 半群. 则

(1) S 有零元 0;

(2) 如果 θ 是 S 的 Fuzzy 同余，则 $\theta_\mu = \theta$, 这里 $\mu(x) = \theta(x, 0)$, $\forall x \in S$

证　(1) $\triangle_S$ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 因为 S 是 FRC- 半群，所以存在一个 S 的 Fuzzy 理想 $\mu(\neq 0)$ 使得 $\triangle_S = \theta_\mu$. 因为 $\mu \neq 0$, 所以 $\mu(x) \neq 0$, $x \in S$. 因此对任意 $y \in S$, $y \neq x$, $\triangle_S(y, x) = \theta_\mu(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) = 0$. 因此 $\mu(y) = 0$. 因为 μ 是 S 的 Fuzzy 理想，对任意 $z \in S$, $\mu(zx) \geqslant \mu(x)$, $\mu(xz) \geqslant \mu(x)$, 这意味着 $zx = xz = x$, 即 x 是 S 的零元.

(2) 设 θ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则因为 S 是 FRC- 半群，存在 Fuzzy 理想 $\mu(\neq 0)$ 使得 $\theta = \theta_\mu$. 设 $\nu(x) = \theta(x, 0), \forall x \in S$. 则对任意 $y \in S$,

$$\begin{aligned}\nu(yx) &= \theta(yx, 0) \geqslant \theta(x, 0) = \nu(x),\\ \nu(yx) &= \theta(yx, 0) \geqslant \theta(y, 0) = \nu(y),\\ \nu(0) &= \theta(0, 0) = 1.\end{aligned}$$

因此 ν 是 S 的 Fuzzy 理想. 为完成证明我们下面仅需证明 $\nu = \mu$. 因为对任意 $y \in S$, $y \neq 0$, $\nu(y) = \theta(y, 0) = \theta_\mu(y, 0) = \mu(y) \wedge \mu(0) = \mu(y)$. 因此 $\mu = \nu$. 证毕. □

6.4.8 定理　设 S 是 FRC- 半群，$FI(S)$ 是 S 的所有 Fuzzy 理想格，$FC(S)$ 是 S 的所有 Fuzzy 同余格. 则映射 $g: \mu \longmapsto \theta_\mu$, $\mu \in FI(S)$ 是 FI(S) 到 FC(S) 的同构.

证　根据定理 6.4.4, 6.4.7, g 是保序单的，要证明 g 是保格序的，我们仅要证明

$$(\forall \mu_1, \mu_2 \in FI(S)) \;\; \theta_{\mu_1} \wedge \theta_{\mu_2} = \theta_{\mu_1 \wedge \mu_2}, \; \theta_{\mu_1} \vee \theta_{\mu_2} = \theta_{\mu_1 \vee \mu_2}.$$

因为对任意 $x, y \in S, x \neq y$,

$$\begin{aligned}(\theta_{\mu_1} \wedge \theta_{\mu_2})(x, y) &= \theta_{\mu_1}(x, y) \wedge \theta_{\mu_2}(x, y) = \mu_1(x) \wedge \mu_1(y) \wedge \mu_2(x) \wedge \mu_2(y)\\ &= (\mu_1 \wedge \mu_2)(x) \wedge (\mu_1 \wedge \mu_2)(y) = \theta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(x, y),\end{aligned}$$

且显然 $\theta_{\mu_1} \wedge \theta_{\mu_2}(x, x) = \theta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(x, x) = 1$. 这意味着 $\theta_{\mu_1} \wedge \theta_{\mu_2} = \theta_{\mu_1 \wedge \mu_2}$. 因为 $\mu_1, \mu_2 \leqslant \mu_1 \vee \mu_2$, 所以 $\theta_{\mu_1} \leqslant \theta_{\mu_1 \vee \mu_2}$ 且 $\theta_{\mu_2} \leqslant \theta_{\mu_1 \vee \mu_2}$. 因此 $\theta_{\mu_1} \vee \theta_{\mu_2} \leqslant \theta_{\mu_1 \vee \mu_2}$. 另一方面，对任意 $x, y \in S$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}\theta_{\mu_1 \vee \mu_2}(x, y) &= (\mu_1 \vee \mu_2)(x) \wedge (\mu_1 \vee \mu_2)(y) = (\mu_1(x) \vee \mu_2(x)) \wedge (\mu_1(y) \vee \mu_2(y))\\ &= (\mu_1(x) \wedge \mu_1(y)) \vee (\mu_1(x) \wedge \mu_2(y))\\ &\quad \vee (\mu_1(y) \wedge \mu_2(x)) \vee (\mu_2(x) \wedge \mu_2(y)).\end{aligned}$$

进一步地,

$$\mu_1(x)\wedge\mu_1(y)=\theta_{\mu_1}(x,y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})(x,y)$$
$$\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})^{\infty}(x,y)=(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y).\tag{6.4.1}$$
$$\mu_2(x)\wedge\mu_2(y)=\theta_{\mu_2}(x,y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})(x,y)$$
$$\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})^{\infty}(x,y)=(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y).\tag{6.4.2}$$

且

$$\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant\mu_1(xy)\wedge\mu_2(xy)\wedge\mu_1(x)\wedge\mu_2(y).\tag{6.4.3}$$
$$\mu_2(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant\mu_1(xy)\wedge\mu_2(xy)\wedge\mu_2(x)\wedge\mu_1(y).\tag{6.4.4}$$

我们讨论 (3) 以下列情形:

1) 如果 $xy=x$, 则

$$\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant\mu_1(x)\wedge\mu_2(x)\wedge\mu_2(y)$$
$$\leqslant\mu_2(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)\quad(\text{由}\ \ (2)).$$

2) 如果 $xy=y$, 则

$$\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant\mu_1(y)\wedge\mu_2(y)\wedge\mu_1(x)$$
$$\leqslant\mu_1(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)\quad(\text{由}\ \ (1)).$$

3) 如果 $xy\neq x,y$, 则

$$\mu_1(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant\theta_{\mu_1}(x,xy)\wedge\theta_{\mu_2}(xy,y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})(x,y)$$
$$\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})^{\infty}(x,y)=(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)\quad(\text{由}\ \ (2)).$$

同理我们讨论 (4) 以这些情形:

4) 如果 $xy=x$, 则

$$\mu_2(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant\mu_1(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)\quad(\text{由}(1))$$

5) 如果 $xy=y$, 则

$$\mu_2(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant\mu_2(x)\wedge\mu_2(y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)\quad(\text{由}(2)).$$

6) 如果 $xy\neq x,y$, 则

$$\mu_2(x)\wedge\mu_1(y)\leqslant\theta_{\mu_1}(y,xy)\wedge\theta_{\mu_2}(xy,x)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(y,x)$$
$$\leqslant(\theta_{\mu_1}\circ\theta_{\mu_2})^{\infty}(y,x)=(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y).$$

总结以上所有情形 $\theta_{\mu_1\vee\mu_2}(x,y)\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})(x,y)$, 即 $\theta_{\mu_1\vee\mu_2}\leqslant(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})$. 结果我们证明了 $\theta_{\mu_1\vee\mu_2}=(\theta_{\mu_1}\vee\theta_{\mu_2})$. 证毕. □

因为 FI(S) 是分配格, 根据定理 6.4.8, 我们有

6.4.9 定理　假设 S 是 FRC- 半群. 则格 $(\mathrm{FC}(S),+,\bullet)$ 是分配的.

6.4.10 定理　假设 S 是 FRC- 半群且 $S^2\neq\{0\}$. 则 S 是 Fuzzy 同余自由的当且仅当 S 是 Fuzzy 0- 单的.

证　($\Longrightarrow$). 假设 S 是 Fuzzy 同余自由的且 $\mu(\neq 0)$ 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 θ_μ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 因为 S 是 Fuzzy 同余自由的, 所以 $\theta_\mu=\nabla_S$ 或 $\theta_\mu=\triangle_S$.

如果 $\theta_\mu=\nabla_S$, 则对任意 $x\in S(x\neq 0)$, $\theta_\mu(0,x)=\nabla_S(0,x)=1=\mu(0)\wedge\mu(x)=\mu(x)$. 因此 $\mu=1_S$.

如果 $\theta_\mu=\triangle_S$, 则对任意 $x\in S(x\neq 0)$, $\theta_\mu(0,x)=\mu(x)=\triangle_S(0,x)=0$. 因此 $\theta_\mu=0_S$.

($\Longleftarrow$). 假设 S 是 Fuzzy 0- 单的, θ 是 S 的 Fuzzy 同余. 则存在一个 S 的 Fuzzy 理想 $\mu(\neq 0)$ 使得 $\theta=\theta_\mu$. 因为 S 是 Fuzzy 0- 单的, 所以 $\mu=0_S$ 或 $\mu=1_S$. 如果 $\mu=1_S$, 则对任意 $x,y\in S$ $(x\neq y)$, $\theta(x,y)=\theta_\mu(x,y)=\mu(x)\wedge\mu(y)=1$, 因此 $\theta=\nabla_S$. 如果 $\mu=0_S$, 通过简单的验证 $\theta_\mu=\triangle_S$. 证毕. □

6.4.11 定理　FRC- 半群的同态像也为 FRC- 半群.

证　设 S 是 FRC- 半群, $f:S\longmapsto T$ 是半群 S 到半群 T 的满同态且 θ 是 T 上的 Fuzzy 同余. 定义 $\phi(x,y)=\theta(f(x),f(y))$, $\forall x,y\in S$. 则 ϕ 是 S 的 Fuzzy 同余. 事实上, ϕ 的自反性和对称性是显然的, 因为

$$\begin{aligned}\phi\circ\phi(x,y)&=\bigvee_{z\in S}(\phi(x,z)\wedge\phi(z,y))\\&=\bigvee_{z\in S}(\theta(f(x),f(z))\wedge\theta(f(z),f(y)))\\&\leqslant\bigvee_{z\in S}(\theta(f(x),z)\wedge\theta(z,f(y)))\\&=(\theta\circ\theta)(f(x),f(y))\leqslant\theta(f(x),f(y))=\phi(x,y).\end{aligned}$$

所以 ϕ 是传递的. 另一方面, 对任意 $x,y,z,t\in S$,

$$\begin{aligned}\phi(xz,yt)&=\theta(f(xz),f(yt))=\theta(f(x)f(z),f(y)f(t))\\&\geqslant\theta(f(x),f(y))\wedge\theta(f(z),f(t))=\phi(x,y)\wedge\phi(y,t).\end{aligned}$$

因此 ϕ 是相容的. 因为 ϕ 是 S 的 Fuzzy 同余, 根据假设存在一个 S 的 Fuzzy 理想 $\mu(\neq 0)$ 使得 $\phi=\phi_\mu$. 设 $f(\mu)$:　$f(\mu)(x)=\sup_{z\in f^{-1}(x)}\mu(z)$. 则 $f(\mu)$ 是 T 的 Fuzzy

理想．事实上，对任意 $x,y\in T$,

$$\begin{aligned} f(\mu)(xy) &= \sup_{z\in f^{-1}(xy)} \mu(z) \geqslant \sup_{z\in f^{-1}(x)f^{-1}(y)} \mu(z) \\ &= \sup_{z_1\in f^{-1}(x),z_2\in f^{-1}(y)} \mu(z_1z_2) \geqslant \sup_{z_1\in f^{-1}(x)} \mu(z_1) = f(\mu)(x), \end{aligned}$$

同理 $f(\mu)(xy)\geqslant f(\mu)(y)$. 因此 $f(\mu)$ 是 T 的 Fuzzy 理想.

下面我们证明 $\theta=\theta_{f(\mu)}$. 因为对任意 $x,y\in T$, $x\neq y$,

$$\begin{aligned} \theta(x,y) &= \theta(f(a),f(b)) \quad (\text{显然}, a\neq b) \\ &= \phi(a,b)=\phi_\mu(a,b)=\mu(a)\wedge\mu(b) \\ &\leqslant (\sup_{z\in f^{-1}(x)}\mu(z))\wedge(\sup_{z\in f^{-1}(y)}\mu(z)) \\ &= f(\mu)(x)\wedge f(\mu)(y)=\theta_{f(\mu)}(x,y). \end{aligned}$$

所以 $\theta\leqslant\theta_{f(\mu)}$. 另一方面,

$$\begin{aligned} \theta_{f(\mu)}(x,y) &= f(\mu)(x)\wedge f(\mu)(y) = \sup_{z\in f^{-1}(x)}\mu(z)\wedge \sup_{w\in f^{-1}(y)}\mu(w) \\ &= \sup_{z\in f^{-1}(x),w\in f^{-1}(y)} (\mu(z)\wedge\mu(w)) = \sup_{z\in f^{-1}(x),w\in f^{-1}(y)} \phi_\mu(z,w) \\ &= \sup_{z\in f^{-1}(x),w\in f^{-1}(y)} \phi(z,w) = \sup_{z\in f^{-1}(x),w\in f^{-1}(y)} \theta(f(z),f(w)) \\ &\leqslant \theta(x,y). \end{aligned}$$

因此 $\theta_{f(\mu)}\leqslant\theta$. 结果 $\theta_{f(\mu)}=\theta$. 证毕. □

6.5 Fuzzy 同余扩张

本节引入半群的模糊同余扩张的概念，给出了模糊同余扩张的同态性质．同时，本节研究了带有模糊同余扩张性质的半群类，证明了一个半群 S 有模糊同余扩张性质当且仅当 S 有同余扩张性质.

设 θ 和 ϕ 是半群 S 上的 Fuzzy 关系，T 是 S 的子半群．θ 和 ϕ 关于 T 的二元运算 "$\circ_T$" 定义如下：

$$(\forall x,y\in S)\ \ (\theta\circ_T\phi)(x,y)=\sup_{z\in T}(\theta(x,z)\wedge(z,y)).$$

θ 称为 T-Fuzzy 传递 的，如果 $\theta\circ_T\theta\subseteq\theta$. 则 θ 的 Fuzzy T- 传递闭包是 $\bigvee_{n=1}^{\infty}{}_T\theta^n$, 记为 ${}_T\theta^\infty$, 这里

$${}_T\theta^n=\overbrace{\theta\circ_T\theta\circ_T\cdots\circ_T\theta}^{n}.$$

如果 $\theta \leqslant \phi$, 则容易看出 ${}_T\theta^{\infty} \leqslant_T \phi^{\infty}$. 如果 $T \quad S$, 我们用 $\theta \circ \phi$ 和 θ^{∞} 分别代替 $\theta \circ_S \phi$ 和 ${}_T\theta^{\infty}$. 假设 α 是 S 上的 Fuzzy 关系, T 是 S 的子半群. 用 $\alpha|_T$ 表示 S 上的 Fuzzy 关系 α 在 T 上的限制. 如果 $\alpha \leqslant f_{T\times T}$ 且 $\alpha|_{T\times T}$ 是 T 上的 Fuzzy 同余, 则 α 也称为 T 的 Fuzzy 同余.

6.5.1 定理 设 α 是半群 S 的 Fuzzy 关系且 T 是 S 的子半群. 则 α 是 T 的 Fuzzy 同余当且仅当对任意 $t \in (0,1]$, α_t 是 T 的同余.

证 因为 $\alpha \leqslant 1_{T\times T}$, 所以对任意 $t \in (0,1]$, $\alpha_t \subseteq (T \times T)$ 且 $\alpha_t = (\alpha|_{T\times T})_t$. 由练习 6.1.4 (1), α_t 是 T 的同余.

反之, 因为 $\alpha_t \subseteq (T \times T)$, $\forall t \in (0,1]$, 且 $\alpha = \bigcup\limits_{(0,1]} t\alpha_t$, 所以 $\mathrm{supp}\alpha \subseteq T \times T$, 即 $\alpha \leqslant 1_{T\times T}$. 容易看出 α 在 T 上是 Fuzzy 自反、 Fuzzy 对称且 Fuzzy 相容的. 为了证明 α 是 T 上的 Fuzzy 同余, 我们仅需证明在 T 上 $\alpha \circ_T \alpha \leqslant \alpha$. 事实上,

$$\begin{aligned}
\forall (u,v) \ &\in \ (\alpha \circ_T \alpha)_t^{>} \Rightarrow (\alpha \circ_T \alpha)(u,v) > t \\
&\Rightarrow \bigvee_{w\in T} ((\alpha, w) \vee \alpha(w,v)) > t \Rightarrow \exists r \in T, \alpha(u,r) \geqslant t, \alpha(r,v) \geqslant t \\
&\Rightarrow (u,r) \in \alpha_t, (r,v) \in \alpha_t \Rightarrow (u,v) \in (\alpha_t \circ_T \alpha_t). \\
\forall (u,v) \ &\in \ (\alpha_t \circ_T \alpha_t) \Rightarrow \exists w \in T, (u,w) \in \alpha_t, (w,v) \in \alpha_t \\
&\Rightarrow \alpha(u,w) \wedge \alpha(w,v) \geqslant t \Rightarrow (\alpha \circ_T \alpha)(u,v) \geqslant t \Rightarrow (u,v) \in (\alpha \circ_T \alpha)_t
\end{aligned}$$

因此 $(\alpha \circ_T \alpha)_t^{>} \subseteq (\alpha_t \circ_T \alpha_t) \subseteq (\alpha \circ_T \alpha)_t$. 故对任意 $t \in (0,1]$, $t(\alpha \circ_T \alpha)_t^{>} \leqslant t(\alpha_t \circ_T \alpha_t \leqslant t(\alpha \circ_T \alpha)_t$. 因为 $(\alpha \circ_T \alpha) = \bigcup\limits_{t\in(0,1]} t(\alpha \circ_T \alpha)_t = \bigcup\limits_{t\in(0,1]} t(\alpha \circ_T \alpha)_t^{>}$, 所以 $\alpha \circ_T \alpha = \bigcup\limits_{t\in(0,1]} t(\alpha_t \circ_T \alpha_t)$. 由假设 $(\alpha_t \circ_T \alpha_t) \subseteq \alpha_t \ \ \forall t \in (0,1]$. 因此 $\alpha \circ_T \alpha \leqslant \bigcup\limits_{t\in(0,1]} t\alpha_t = \alpha$. 证毕. □

假设 α 是 S 上的 Fuzzy 关系, T 是 S 的子半群且 α 是 T 的 Fuzzy 同余. 如果存在 S 的 Fuzzy 同余 α 使得 $\alpha^* \cap 1_{T\times T} = \alpha$, 那么 α^* 称为 α 的 Fuzzy 同余扩张, 在不至于混淆的情况下我们也称 α^* 是 α 的 Fuzzy 同余扩张.

6.5.2 定理 半群 S 的子半群 T 上的 Fuzzy 同余 α 具有到 S 的 Fuzzy 同余扩张当且仅当 α_S 是 α 到 S 的 Fuzzy 同余扩张, α_S 是 S 上的由 α 生成的 Fuzzy 同余.

证 如果 α^* 是 α 到 S 上的 Fuzzy 同余扩张. 则 $\alpha^* \cap 1_{T\times T} = \alpha$. 因为 $\alpha \leqslant \alpha^*$, 容易看出 $\alpha_S \leqslant \alpha^*$ 且 $\alpha \leqslant \alpha_S \cap 1_{T\times T} \leqslant \alpha^* \cap 1_{T\times T} = \alpha$. 因此 $\alpha_S \cap 1_{T\times T} = \alpha$.

反之, 显然. 证毕. □

假设 S 和 X 是半群, φ 是 S 到 X 的满同态, 我们知道 $\mathrm{Ker}f = \{(a,b) \in S \times S : f(a) = f(b)\}$ 是 S 上的同余. 以下 Y 是 X 的子半群且 $T = f^{-1}(Y)$. 则

6.5.3 定理 设 α 是 X 上的 Fuzzy 关系且为 Y 上的 Fuzzy 同余. 设 ρ 是 S 上的如下定义的 Fuzzy 关系: $\rho(x,y) := \alpha(f(x),f(y)),\forall x,y\in S$. 则 ρ 是 T 上的 Fuzzy 同余.

证 如果 $x\notin T$, 则 $f(x)\notin Y$. 因此 $\rho\leqslant 1_{T\times T}$. 对任意 $x,y\in T$, 显然 $\rho(x,x)=1,\rho(x,y)\quad\rho(y,x)$ 且 ρ 关于 T 是 Fuzzy 相容的. 因此为了证明 ρ 是 T 上的 Fuzzy 同余, 我们仅需证明在 T 上 $\rho\circ_T\rho\subseteq\rho$. 事实上,

$$\begin{aligned}\rho\circ_T\rho(x,y) &= \sup_{z\in T}(\rho(x,z)\wedge\rho(z,y))=\sup_{z\in T}(\alpha(\varphi(x),\varphi(z))\wedge\alpha(\varphi(z),\varphi(y)))\\ &\leqslant \alpha\circ_Y\alpha(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant\alpha(\varphi(x),\varphi(y))=\rho(x,y),\forall x,y\in T.\end{aligned}$$

证毕. □

上定理中的 T 上的 Fuzzy 同余 ρ 称为 α 的 Fuzzy 拉回.

6.5.4 定理 设 α 是 Y 上的 Fuzzy 同余, ρ 是 α 的 Fuzzy 拉回. 则下列各款成立:

(1) 如果 $\rho=\Delta_T$, 则 $\alpha=\Delta_Y$;

(2) 如果 $\alpha=\Delta_Y$, 则 $\rho=1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$;

(3) ρ 是 $f_{T\times T}$ 当且仅当 α 是 $f_{Y\times Y}$;

(4) 如果 ρ 和 σ 分别为 α 和 β 的 Fuzzy 拉回且 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $\rho\leqslant\sigma$

证 我们仅证明 (1) 和 (2), (3) 和 (4) 作为练习.

(1) 如果 $x=y\in Y$, 则存在 $x_1\in T$ 使得 $\alpha(x,y)=\alpha(\varphi(x),\varphi(y))=\rho(x_1,x_1)=1$. 否则, 如果 $x\notin Y,y\in X$, 则存在 $x_1\notin T$ 和 $y_1\in S$ 使得 $\varphi(x_1)=x,\varphi(y_1)=y$ 且 $\alpha(x,y)=\alpha(f(x_1),f(y_1))=\rho(x_1,y_1)=0$. 相似地, 我们有 $\alpha(x,y)=0$, $y\notin Y$. 因此 $\alpha=\Delta_Y$.

(2) 因为 $\rho(x,y)=\alpha(\varphi(x),\varphi(y))$. 由 $\alpha=\Delta_Y$, 则如果 $\varphi(x)=\varphi(y)\in Y$, 有 $\rho(x,y)=1$; 否则 $\rho(x,y)=0$. 因此如果 $(x,y)\in\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)$, 则 $\rho(x,y)=1$; 否则 $\rho(x,y)=0$. 这意味着 $\rho=f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$. 证毕. □

6.5.5 定理 设 ρ 是 S 上的 Fuzzy 关系且为 T 上的 Fuzzy 同余 ($=f^{-1}(Y)$) 又设 θ 是 X 上以下定义的 Fuzzy 关系:

$$\theta(x,y)=\sup_{t_1\in f^{-1}(x),t_2\in f^{-1}(y)}\rho(t_1,t_2),x,y\in X.$$

则 $\theta\leqslant f_{Y\times Y}$ 且 $\theta|_Y$ 是 Fuzzy 自反、 Fuzzy 对称和 Fuzzy 相容的.

证 因为 $\rho\leqslant f_{T\times T}$, 容易看出 $\theta\leqslant f_{Y\times Y}$. 对任意的 $x\in Y$, 因为 $\theta(x,x)=\sup\limits_{t_1,t_2\in f^{-1}(x)}\rho(t_1,t_2)\geqslant\rho(t_1,t_2)=1$, 所以 $\theta(x,x)=1$. 当然 θ 是 Fuzzy 对称的.

下面证明 θ 在 Y 上是 Fuzzy 相容的. 设 $(x,y)\in Y\times Y,c\in Y$. 则

$$\theta(cx,cy)=\sup_{k_1\in f^{-1}(cx),k_2\in f^{-1}(cy)}\rho(k_1,k_2).$$

对任意的 $t_1 \in f^{-1}(x), t_2 \in f^{-1}(y)$, 因为 $c \in Y$, 则存在 $c_1 \in T$ 使得 $f(c_1) = c$. 因此 $c_1t_1 \in f^{-1}(cx), c_1t_2 \in f^{-1}(cy)$. 故

$$\begin{aligned}\theta(cx, cy) &\geqslant \sup_{\substack{c_1t_1 \in f^{-1}(cx)\\ c_1t_2 \in f^{-1}(cy)}} \rho(c_1t_1, c_1t_2) = \sup_{\substack{t_1 \in f^{-1}(x)\\ t_2 \in f^{-1}(y)}} \rho(c_1t_1, c_1t_2)\\ &\geqslant \sup_{t_1 \in f^{-1}(x), t_2 \in f^{-1}(y)} \rho(t_1, t_2) = \theta(x, y).\end{aligned}$$

同理可得 $\theta(xc, yc) \geqslant \theta(x, y)$. 证毕. □

6.5.6 引理　设 ρ_1 和 ρ_2 是 S 的 Fuzzy 关系且为 S 的子半群 $T = f^{-1}(Y)$ 的 Fuzzy 同余. 则 T 的包含 ρ_1 和 ρ_2 的最小 Fuzzy 同余 (记为 $\rho_1 +_T \rho_2$) 是 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty$.

证　假设 $x, y \in S$. 不失一般性设 $x \notin T$. 则 $\rho_1 \circ_T \rho_2(x, y) = \sup_{z \in T}(\rho_1(x, z) \wedge \rho_2(z, y)) = 0$, 且

$$\begin{aligned}{}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty(x, y) &= \bigvee_{n=1}^{\infty} {}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^n(x, y)\\ &= \bigvee_{n=1}^{\infty}\Big(\bigvee_{t_1, t_2, \cdots, t_{n-1} \in T}((\rho_1 \circ_T \rho_2)(x, t_1) \wedge \cdots\\ &\qquad \wedge(\rho_1 \circ_T \rho_2)(t_{n-1}, y))\Big)\\ &= 0 \ \ (\text{因为}\ \ \rho_1 \circ_T \rho_2(x, t_1) = 0).\end{aligned}$$

因此 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty \leqslant 1_{T \times T}$ 另一方面, 容易看出在 T 上 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty = (\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty$. 根据假设 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty|_T$ 是 T 上的由 $\rho_1|_T$ 和 $\rho_2|_T$ 生成的 Fuzzy 同余. 因此 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty$ 是 T 的 Fuzzy 同余.

进一步地, 设 ρ 是 S 的 Fuzzy 关系且为 S 的子半群 T 的包含 ρ_1 和 ρ_2 的 Fuzzy 同余. 则 $\rho_1 \circ_T \rho_2 \leqslant \rho$. 因此 ${}_T(\rho_1 \circ_T \rho_2)^\infty \leqslant \rho$. 证毕. □

根据定理 6.5.5 和引理 6.5.6, 容易得出

6.5.7 定理　假设 ρ 是 S 上的 Fuzzy 关系且是 $T = f^{-1}(Y)$ 的 Fuzzy 同余. 设 θ 是 X 上的 Fuzzy 关系定义如同定理 6.5.5. 则 ${}_Y\theta^\infty$ 是 Y 的 Fuzzy 同余.

上定理中 ${}_Y\theta^\infty$ 称为 ρ 的 Fuzzy 推出.

6.5.8 定理　假设 α 是 Y 的 Fuzzy 同余. 如果 ρ 是 α 的 Fuzzy 拉回. 则 α 是 ρ 的 Fuzzy 推出.

证　根据 $T(= f^{-1}(Y))$ 的 Fuzzy 同余的 Fuzzy 推出的定义, ${}_Y\theta^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}_T\theta^n$ 是 ρ 的 Fuzzy 推出, 这里 $(\forall x, y \in Y)$ $\theta(x, y) = \sup_{t_1 \in f^{-1}(x), t_2 \in f^{-1}(y)} \rho(t_1, t_2)$. 因为 ρ 是 α 的 Fuzzy 拉回, 所以 $\rho(t_1, t_2) = \alpha(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) = \alpha(x, y)$. 因此 $\theta(x, y) = \alpha(x, y)$. 故 ${}_Y\theta^\infty = {}_Y\alpha^\infty = \alpha$ 是 ρ 的 Fuzzy 推出. 证毕. □

6.5.9 定理　设 ρ 是 S 的子半群 $T=f^{-1}(Y)$ 的 Fuzzy 同余，α 是 ρ 的 Fuzzy 推出. 又设 $\overline{\rho}$ 是 α 的 Fuzzy 拉回. 则

(1) $\rho\leqslant\overline{\rho}$;

(2) $\rho=\overline{\rho}$ 当且仅当 $f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}\leqslant\rho$.

证　(1) 由假设 $\alpha={}_Y\theta^{\infty}$, 这里 $\theta(x,y)=\sup_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)}\rho(t_1,t_2),\forall x,y\in Y$, 且

$$(\forall x,y\in T)\ \ \overline{\rho}(x,y)=\alpha(\varphi(x),\varphi(y))=\bigvee_{n=1}^{\infty}{}_Y\theta^n(\varphi(x),\varphi(y)).$$

因为 $x\in\varphi^{-1}(\varphi(x)),y\in\varphi^{-1}(\varphi(y))$. 所以 $\rho(x,y)\leqslant\theta(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant\overline{\rho}(x,y)$, $\forall x,y\in T$. 因此 $\rho\leqslant\overline{\rho}$.

(2) 如果 $\overline{\rho}=\rho$, 对任意 $(x,y)\in\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)$, $\varphi(x)=\varphi(y)$ 且 $\rho(x,y)=\overline{\rho}(x,y)=\alpha(\varphi(x),\varphi(y))=1$. 因此 $f_{\mathrm{Ker}\varphi}\cap(T\times T)\leqslant\rho$.

反之，因为 ρ 是 T 上的 Fuzzy 同余，所以

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\geqslant{}_T\rho^3(x,y)=\sup_{t_1,t_2\in T}(\rho(x,t_1)\wedge\rho(t_1,t_2)\wedge\rho(t_2,y))\\&\geqslant\sup_{\substack{t_1\in\varphi^{-1}(\varphi(x))\\t_2\in\varphi^{-1}(\varphi(y))}}(\rho(x,t_1)\wedge\rho(t_1,t_2)\wedge\rho(t_2,y)),\forall x,y\in T.\end{aligned}$$

由假设 $f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}\leqslant\rho$, 因为 $(x,t_1),(t_2,y)\in\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)$, 所以 $\rho(x,t_1)=\rho(t_2,y)=1$, 这意味着 $\rho(x,y)\geqslant\theta(\varphi(x),\varphi(y))$. 由 θ 的定义，我们有 $\rho(x,y)=\theta(\varphi(x),\varphi(y))$, $\forall x,y\in T$. 因此 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}{}_Y\theta^n(\varphi(x),\varphi(y))&=\sup_{z_1\in Y}\sup_{z_2\in Y}\cdots\sup_{z_{n-1}\in Y}(\theta(\varphi(x)\wedge z_1)\wedge\cdots\wedge\theta(z_{n-1},\varphi(y)))\\&=\sup_{t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\in T=\varphi^{-1}(Y)}(\theta(\varphi(x),\varphi(t_1))\wedge\cdots\wedge\theta(\varphi(t_{n-1}),\varphi(y)))\\&=\sup_{t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\in T}(\rho(x,t_1)\wedge\cdots\wedge\rho(t_{n-1},y))={}_T\rho^n(x,y).\end{aligned}$$

因此 $\rho(x,y)=\bigvee_{n=1}^{\infty}{}_T\rho^n(x,y)=\bigvee_{n=1}^{\infty}{}_Y\theta^n(\varphi(x),\varphi(y))=\overline{\rho}(x,y)$. 由此推出 $\rho=\overline{\rho}$. 证毕. □

现在我们准备描述上定理中出现的 T 的 Fuzzy 同余 $\overline{\rho}$.

6.5.10 定理　设 ρ 是 S 的 Fuzzy 关系且为 $T=\varphi^{-1}(Y)$ 的 Fuzzy 同余. 如果 α 是 Fuzzy 同余 ρ 的 Fuzzy 推出. 则 $\rho+_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 是 α 的 Fuzzy 拉回.

证　因为 $f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}\leqslant\rho+_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$. 根据定理 6.5.9, 要证明 $\rho+_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 是 α 的 Fuzzy 拉回，只要证明 α 是 $\rho+_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 的 Fuzzy 推出.

我们知道 $\rho +_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 的 Fuzzy 推出是 $\overline{\alpha} = {}_Y\phi^\infty$, 这里

$$\phi(x,y) = \sup_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} (\rho +_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\in(T\times T)})(t_1,t_2),\ \forall x,y\in X.$$

根据引理 6.5.6, $\rho +_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)} = {}_T(\rho \circ_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})^\infty$, 且

$$\begin{aligned}\rho \circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}(t_1,t_2) &= \bigvee_{s\in T}(\rho(t_1,s)\wedge 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}(s,t_2))\\ &= \bigvee_{s\in T\cap\varphi^{-1}(y)} \rho(t_1,s) \geqslant \rho(t_1,t_2),\ t_1,t_2\in T.\end{aligned}$$

因此对任意 $x,y\in Y$

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} {}_T(\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})^n(t_1,t_2)\right)\\ &\geqslant \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} (\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})(t_1,t_2)\\ &\geqslant \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \rho(t_1,t_2) = \alpha(x,y)\ \ (\text{因为}\ \ t_1,t_2\in T).\end{aligned}$$

因此 $\overline{\alpha} = {}_Y\phi^\infty \geqslant {}_Y\alpha^\infty = \alpha$. 另一方面

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} {}_T(\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})^n(t_1,t_2)\right)\\ &= \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in T} (\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})\\ &\qquad (t_1,k_1)\wedge\cdots\wedge(\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})(k_{n-1},t_2),\ \forall x,y\in Y.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\rho\circ_T 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}(k_i,k_{i-1}) &= \bigvee_{s\in T}(\rho(k_i,s)\wedge 1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)})(s,k_{i-1})\\ &= \bigvee_{s\in\varphi^{-1}(\varphi(k_{i-1}))} \rho(k_i,s) \leqslant \theta(\varphi(k_i),\varphi(k_{i-1})),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &\leqslant \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in T} (\theta(x,\varphi(k_1))\wedge\cdots\wedge\theta(\varphi(k_{n-1},y)))\\ &\leqslant \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \bigvee_{n=1}^{\infty} {}_Y\theta^n(x,y) = \alpha(x,y),\ \forall x,y\in Y.\end{aligned}$$

结果 $\phi \leqslant \alpha$ 且 $\overline{\alpha} = {}_Y\phi^\infty \leqslant {}_Y\alpha^\infty = \alpha$. 结合以上两步我们证得 α 是 $\rho +_T f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 的 Fuzzy 推出. 证毕. □

6.5.11 定理　设 φ 是半群 S 到半群 X 的满同态. 设 Y 是 X 的子半群, α 是 X 上的 Fuzzy 关系且是 Y 的 Fuzzy 同余. 设 ρ 是 α 到 $T = f^{-1}(Y)$ 的 Fuzzy 拉回, α_X 是 X 上 α 生成的 Fuzzy 同余, σ 是 α_X 的 Fuzzy 拉回. 则

(1) 如果 ρ_S 是 ρ 生成的 S 的 Fuzzy 同余. 则 ρ_S 的 Fuzzy 推出是 α_X.

(2) 如果 σ 是 ρ 到 S 的 Fuzzy 扩张, 则 α 可以 Fuzzy 扩张到 X.

证　(1) 由定义 ρ_S 的 Fuzzy 推出是 β^∞, 这里 $\beta(x,y) = \bigvee_{t_1\in f^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)}\rho_S(t_1,t_2)$, $\forall x,y\in X$. 因为 α 是 ρ 的 Fuzzy 推出, 所以 $\alpha = {}_Y\theta^\infty$, 这里

$$\theta(x,y) = \bigvee_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)}\rho(t_1,t_2),\ \forall x,y\in X.$$

因为 $\rho \leqslant \rho_S$, 所以 $\theta \leqslant \beta$. 因此 ${}_Y\theta^\infty \leqslant {}_Y\beta^\infty \leqslant \beta^\infty$. 因为 β^∞ 是 X 上的 Fuzzy 同余, 所以 $\alpha_X = ({}_Y\theta^\infty)_X \leqslant \beta^\infty$.

另一方面, 设 $x,y\in X$. 如果 $x=y$, 则 $\alpha_X(x,y) = \beta^\infty(x,y) = 1$. 如果 $x\neq y$, 则 $t_1 \neq t_2$, $\forall t_1\in f^{-1}(x), t_2\in\varphi^{-1}(y)$. $\beta^\infty(x,y) = \sup_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)}\rho_S(t_1,t_2)$, 且 $\rho_S(t_1,t_1) = \bigvee_{n=1}^{\infty} B^n(t_1,t_2)$, 这里 $B = \rho^*\cup(\rho^*)^{-1}\cup\Delta_S$. 不难看出 $\rho(a,b) = \rho(b,a), \forall a,b\in S$, 因此

$$\begin{aligned}
B(t_1,t_2) &= \rho^*(t_1,t_2)\vee(\rho^*)^{-1}(t_1,t_2)\vee\Delta_S(t_1,t_2)\\
&= \rho^*(t_1,t_2)\vee\rho^*(t_2,t_1)\ \ (\text{因为}\ t_1\neq t_2)\\
&= \sup_{u,v\in X^1,uav=t_1,ubv=t_2}\rho(a,b)\vee\left(\sup_{u,v\in X^1,uav=t_1,ubv=t_2}\rho(b,a)\right)\\
&= \sup_{u,v\in X^1,uav=t_1,ubv=t_2}\rho(a,b) = \sup_{u,v\in X^1,uav=t_1,ubv=t_2}\alpha(\varphi(a),\varphi(b))
\end{aligned}$$

进一步地,

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi(a),\varphi(b)) &\leqslant \alpha_X(\varphi(a),\varphi(b))\\
&\leqslant \alpha_X(\varphi(u)\varphi(a)\varphi(v),\varphi(u)\varphi(b)\varphi(v))\\
&= \alpha_X(\varphi(t_1),\varphi(t_2)) = \alpha_X(x,y).
\end{aligned}$$

因此 $B(t_1,t_2)\leqslant\alpha_X(x,y)$, 这意味着

$$\begin{aligned}
B^n(t_1,t_2) &= \sup_{k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in S}(B(t_1,k_1)\wedge\cdots\wedge B(k_{n-1},t_2))\\
&\leqslant \sup_{k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in S}(\alpha_X(x,\varphi(k_1))\wedge\cdots\wedge\alpha_X(\varphi(k_{n-1}),y))\\
&\leqslant \alpha_X^n(x,y)\leqslant\alpha_X(x,y).
\end{aligned}$$

因此 $\rho_S(t_1,t_2) \leqslant \alpha_X(x,y)$, 即 $\beta^{\infty}(x,y) \leqslant \sup_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \alpha_X(x,y)$. 故 $\beta^{\infty} \leqslant \alpha_X$.

(2) 因为 σ 是 α_X 的 Fuzzy 拉回且 α 是 ρ 的 Fuzzy 推出，所以

$$\begin{aligned}(\alpha_X \cap 1_{Y\times Y})(x,y) &= \alpha_X(x,y)\\ &= \sigma(t_1,t_2) \quad (t_1 \in \varphi^{-1}(x), t_2 \in \varphi^{-1}(y))\\ &= (\sigma \cap 1_{T\times T})(t_1,t_2) \quad (\text{因为}\ \ t_1,t_2 \in T)\\ &= \rho(t_1,t_2),\ \forall x,y \in Y.\end{aligned}$$

因此 $(\alpha_X \cap 1_{Y\times Y})(x,y) = \sup_{t_1\in\varphi^{-1}(x),t_2\in\varphi^{-1}(y)} \rho(t_1,t_2) = \alpha(x,y)$, $\forall x,y \in Y$. 故 α_X 是 α 向 X Fuzzy 同余扩张. 证毕. □

设 S 是半群, S 称为具有 Fuzzy 同余扩张性质 (简称 FCEP), 如果对 S 的任意子半群 T , ρ 是 T 的 Fuzzy 同余, 则 ρ 能 Fuzzy 扩张到 S, 即存在 S 的一个 Fuzzy 同余 ρ^* 使得 $\rho^* \cap f_{T\times T} = \rho$.

6.5.12 定理 半群 S 具有 FCEP 当且仅当它的任意子半群也有 FCEP.

证 设 T 是 S 的子半群, X 是 T 的子半群. 设 ρ 是 T 上的 Fuzzy 关系且是 X 上的 Fuzzy 同余. 因为 X 也是 S 的子半群, 由假设, 我们有 S 上的 Fuzzy 同余 ρ^* 使得 $\rho^* \cap f_{X\times X} = \rho_1$, 这里 ρ_1 定义如下: 如果 $x,y \in T$, 则 $\rho_1(x,y) = \rho(x,y)$; 否则 $\rho_1(x,y) = 0$.

设 $\rho^{**} = \rho^*|_T$. 显然 ρ^* 是 T 上的 Fuzzy 同余且 $\rho = \rho_1|T = \rho^{**} \cap 1_{X\times X}|_T$. 因此 ρ 是到 T 的 Fuzzy 扩张. 反之显然. 证毕. □

作为定理 6.5.11 的应用, 我们有下面的定理.

6.5.13 定理 设 φ 是具有 FCEP 的半群 S 到半群 X 的满同态. 设 Y 是 X 的子半群, $T = \varphi^{-1}(Y)$. 如果 $1_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)}$ 在 S 上生成的 Fuzzy 同余是 $f_{\mathrm{Ker}\varphi}$. 则 Y 的每个 Fuzzy 同余能被 Fuzzy 扩张到 X.

证 设 α 是 Y 的 Fuzzy 同余且 ρ 是 α 的 Fuzzy 拉回. 设 α_X 是 X 上的由 α 生成的 Fuzzy 同余, ρ_S 是 S 上的由 ρ 生成的 Fuzzy 同余. 由定理 6.5.10, 6.5.11, $\rho_S +_S 1_{\mathrm{Ker}\varphi}$ 是 α_X 的 Fuzzy 拉回.

因为 ρ 是 α 的 Fuzzy 拉回, 所以 $f_{\mathrm{Ker}\varphi\cap(T\times T)} \leqslant \rho$. 因此由假设 $f_{\mathrm{Ker}\varphi} \leqslant \rho_S$. 由此推出 ρ_S 是 α_X 的 Fuzzy 拉回. 结果

$$(\alpha_X \cap 1_{Y\times Y})(x,y) = \alpha_X(x,y) = \rho_S(t_1,t_2) \ \ (\forall t_1 \in \varphi^{-1}(x), t_2 \in \varphi^{-1}(y)),\ \forall x,y \in Y.$$

因为 S 有 FCEP, 所以 $\rho_S \cap 1_{T\times T} = \rho$. 因此

$$\begin{aligned}(\alpha_X \cap 1_{Y\times Y}) &= (\rho_S \cap 1_{T\times T})(t_1,t_2)\\ &= \rho(t_1,t_2) = \alpha(x,y). \quad (t_1 \in \varphi^{-1}(x), t_2 \in \varphi^{-1}(y)),\ \forall x,y \in Y,\end{aligned}$$

即 α_X 是 α 到 X 的 Fuzzy 扩张. □

6.5.14 推论　如果具有 FCEP 的半群 S 和半群 X 同构，则 X 也有 FCEP.

具有 FCEP 的半群的同态像是否也具有 FCEP 这是一个至今没有解决的问题. 我们下面考虑一个特殊的情形.

6.5.15 推论　设 S 是具有 FCEP 的半群. I 是 S 的理想. 则 S/I 也具有 FCEP.

证　设 $X = S/I, \varphi$ 是 S 到 X 的自然同态. 设 Y 是 X 的子半群，$T = \varphi^{-1}(Y)$. 则 $\varphi(I)$ 是 S/I 的零元，记为 0.

(1) 如果 $0 \in Y$. 则 $I \subseteq T$. 设 δ 是 $f_{\mathrm{Ker}\varphi \cap (T\times T)}$ 生成的 S 的 Fuzzy 同余. 因为 $\mathrm{Ker}\varphi = \triangle_S \cup (I \times I)$, 所以

$$\mathrm{Ker}\varphi \cap (T \times T) = (\triangle_S \cap (I \times I)) \cap (T \times T) = \triangle_T \cup (I \times I).$$

因此 $f_{\triangle_S \cup (I\times I)} \leqslant 1_{\triangle_S \cup (I\times I)} \leqslant \delta$ 故 $\delta = 1_{\mathrm{Ker}\varphi}$. 由定理 6.5.13, S/I 有 FCEP.

(2) 如果 $0 \notin Y$. 则 $I \cap T = \phi$. 设 α 是 Y 的 Fuzzy 同余. 设 $Y_1 = Y \cup \{0\}$. 则 Y_1 是 S/I 的包含 0 的子半群. 设

$$(\forall x, y \in S/I)\ \ \alpha_1(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y), & x, y \in Y, \\ 1, & x = y = 0, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

α_1 是 Y_1 的 Fuzzy 同余且由 (1),$\alpha_1 \cap 1_{Y\times Y} = \alpha$. 存在 S/I 的一个 Fuzzy 同余 δ 使得 $\delta \cap 1_{Y_1 \times Y_1} = \alpha_1$. 因此

$$\delta \cap 1_{Y\times Y} = (\delta \cap 1_{Y_1\times Y_1}) \cap 1_{Y\times Y} = \alpha_1 \cap 1_{Y\times Y} = \alpha.$$

故 α 可以扩张到 S/I. 证毕. □

6.5.16 定理　设 S 是半群. 则 S 有 FCEP 当且仅当 S 有 CEP.

证　设 T 是 S 的子半群且 σ 是 T 的同余. 则 f_σ 是 T 上的 Fuzzy 同余. 根据假设存在 S 上的一个 Fuzzy 同余 ρ 使得 $\rho \cap f_{T\times T} = f_\sigma$. 设 $\rho_1 = \{(x, y) \in S \times S \mid \rho(x, y) = 1\}$. 则 ρ_1 是 S 上的同余且 $\rho_1 \cap (T \times T) = \sigma$. 事实上，如果 $(x, y) \in \sigma, x, y \in T$, 则 $1_{\sigma(x,y)} = 1$. 因此 $(\rho \cap 1_{T\times T})(x, y) = 1$, 即 $\rho(x, y) = 1$. 由此推出 $(x, y) \in \rho_1 \cap (T \times T)$. 反之，如果 $(x, y) \in \rho_1 \cap (T \times T)$, 则 $x, y \in T$ 且 $\rho(x, y) = 1$. 因此 $1_{\sigma(x,y)} = 1$, 即 $(x, y) \in \sigma$. 这时 ρ_1 是 σ 到 S 的扩张.

反之，设 S 有 FCEP, α 是 T 的 Fuzzy 同余. $\alpha = \bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]} \lambda\alpha_\lambda$, 这里 α_λ 是 T 的同余. 根据假设对任意 α_λ, 存在一个 S 的同余 β_λ 使得 $\beta_\lambda \cap (T \times T) = \alpha_\lambda$. 设 $\beta = \bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]} \lambda\beta_\lambda$. 则 β 是 S 的同余且对任意 $x, y \in T$,

$$\begin{aligned}(f_{T\times T}\cap\beta)(x,y) &= \beta(x,y)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\beta_\lambda(x,y)\\ &= \bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(\beta_\lambda\cap(T\times T))(x,y)\\ &= \left(\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\alpha_\lambda\right)(x,y)=\alpha(x,y).\end{aligned}$$

因此 $f_{T\times T}\cap\beta=\alpha$. 证毕. □

6.5.17 推论　设 S 是具有 CEP 的半群, I 是 S 的理想. 则 S/I 具有 CEP.

证　根据定理, 直接验证. 证毕. □

设 μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 $\overline{\mathrm{supp}}\mu=\{x\in S:\mu(x)=1\}$ 是 S 的理想且我们有

6.5.18 定理　设 S 是半群且 μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 S/ρ_μ 和 $S/\overline{\mathrm{supp}}\mu$ 同构.

证　设 $\varphi: S/\overline{\mathrm{supp}}\mu\mapsto S/\rho_\mu\mid x\overline{\mathrm{supp}}\mu\mapsto x\rho_\mu$. 则 φ 是可定义的和单的. 事实上, 如果 $x\overline{\mathrm{supp}}\mu=y\overline{\mathrm{supp}}\mu$, 则

$$\begin{aligned}(x,y)\ &\in\ (\overline{\mathrm{supp}}\mu\times\overline{\mathrm{supp}}\mu)\cup\Delta_S\Leftrightarrow x=y\ \text{或}\ x,y\in\overline{\mathrm{supp}}\mu\\ &\Leftrightarrow\ x=y\ \text{或}\ \mu(x)=\mu(y)=1\Leftrightarrow x=y\ \text{或}\ \mu(x)\wedge\mu(y)=1\\ &\Leftrightarrow\ \rho_\mu(x,y)=1\Rightarrow x\rho_\mu=y\rho_\mu.\end{aligned}$$

显然 φ 是满的且 $\varphi(x\overline{\mathrm{supp}}\mu\cdot y\overline{\mathrm{supp}}\mu)=\varphi(x\overline{\mathrm{supp}}\mu)*\varphi(y\overline{\mathrm{supp}}\mu)$. 证毕. □

6.5.19 推论　设 S 是具有 FCEP 的半群, μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 则 S/ρ_μ 也具有 FCEP.

在本节的最后我们再回到第 4 章中看具有 SFIEP 的半群, 研究它和具有 FCEP 的关系. 我们知道, 如果一个半群 S 具有 FIEP, 则它一定有 SFIEP. 但是逆对否仍是一个公开问题. 对于 FRC- 半群, 我们有

6.5.20 定理　设 S 是具有 FCEP 的 FRC- 半群且 S 的所有子半群都包含 S 的零元. 则 S 具有 SFIEP.

证　根据定理 6.4.7, S 有零元 0. 设 T 是 S 的子半群, 且 ν 是 T 的 Fuzzy 理想. 我们考虑下列情形:

A) 如果 $\mathrm{supp}\nu=\{0\}$. 则 ν 也是 S 的 Fuzzy 理想. 则存在 S 的一个 Fuzzy 理想 $\mu\ (=\nu)$ 使得 $\mu\cap f_T=\nu$.

B) 如果 $\mathrm{supp}\nu\neq 0$. 设 θ_μ 是 S 上的 Fuzzy 关系, 定义如下:

$$(\forall x,y\in S)\ \ \theta_\mu(x,y)=\begin{cases}\mu(x)\wedge\mu(y), & x,y\in T,x\neq y;\\ 1, & x=y\in T;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

则 θ_μ 是 T 的 Fuzzy 同余. 由假设存在 S 的一个 Fuzzy 同余 σ 使得 $\sigma \cap f_{T\times T} \quad \theta_\mu$. 因为 S 是 FRC- 半群, 所以存在 S 的 Fuzzy 理想 ν 使得 $\sigma = \theta_\nu$. 由定理 6.4.7, $\nu(x) = \sigma(x,0), \forall x \in S$. $\nu \cap f_T = \mu$, 即 ν 是 μ 的 Fuzzy 扩张. 事实上, 对任意的 $x \in T$, 如果 $x = 0$, 因为 $0 \in T$, 显然 $\nu \cap 1_T(0) = \mu(0) = 1$. 如果 $x \neq 0$, 由 $0 \in T$ 和 θ_μ 的定义,

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 1 \wedge \mu(x) = \mu(0) \wedge \mu(x) = \theta_\mu(x,0) \\ &= (\sigma \cap 1_{T\times T})(x,0) = \sigma(x,0) = \nu(x).\end{aligned}$$

证毕. □

6.5.21 定理 设 S 是 FRC- 半群, 且 S 的所有子半群都包含 S 的零元. 则 S 具有 FCEP 当且仅当 S 有 SFIEP 且 S 的每个子半群是 FRC- 半群.

证 设 S 有 FCEP. 由定理 6.5.20, S 有 SFIEP. 设 T 是 S 的子半群且 σ 是 T 上的 Fuzzy 同余. 我们扩张 σ 到 S 上的 Fuzzy 关系 σ^* :

$$\sigma^*(x,y) = \begin{cases} \sigma(x,y), & x, y \in T, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

则 σ^* 是 T 的 Fuzzy 同余. 另 -方面, 因为 S 是 FRC- 半群且具有 FCEP, 所以存在 S 的 Fuzzy 同余 ρ 使得 $\rho \cap f_{T\times T} = \sigma^*$, 且存在 S 的 Fuzzy 理想 μ 使得 $\rho = \theta_\mu$. 设 $\nu = \mu \cap f_T$. 则 ν 是 T 的 Fuzzy 理想. 事实上, 对任意 $x, y \in S$, 如果 $xy \in T$, 则

$$\begin{aligned}\nu(xy) &= \mu(xy) \geqslant \mu(x), \mu(y) \\ &\geqslant (\mu \cap 1_T)(x) \cap 1_T(y), \quad (\mu \cap 1_T)(y) \cap 1_T(x).\end{aligned}$$

如果 $xy \notin T$, 则 $x \notin T$ 或 $y \notin T$. 因此 $\nu(xy) = (\mu \cap f_T)(x) \cap f_T(y) = (\mu \cap f_T)(y) \cap f_T(x) = 0$. 因此

$$\sigma^*(x,y) = \begin{cases} \mu(x) \wedge \mu(y) = \nu(x) \wedge \nu(y), & x, y \in T, x \neq y, \\ 1, & x = y \in T, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

故 $\sigma = \sigma^*|_T$ 是由 ν 决定的 Fuzzy Rees 同余.

反之, 设 T 是 S 的子半群, σ 是 T 的 Fuzzy 同余. 则 $\sigma|_T$ 是 T 上的 Fuzzy 同余. 因为 T 是 FRC- 半群, 则存在 T 的 Fuzzy 子集和 Fuzzy 理想 ν 使得 $\sigma|_T - \theta_\nu$ 设 ν^* 是 S 的 Fuzzy 子集, 定义如下:

$$\nu^*(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \in T, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

则 ν^* 是 T 的 Fuzzy 理想, 也是 S 的子半群. 因为 S 有 SFIEP, 所以存在 S 的 Fuzzy 理想 μ 使得 $\mu \cap f_T = \nu$. 设 $\sigma^* = \theta_\mu$. 则 σ^* 是 σ 的 Fuzzy 扩张, 即 $\sigma^* \cap 1_{T\times T} = \sigma$. 事实上,

$$\begin{aligned}(\forall x, y \in T, x \neq y)\ \sigma(x,y) &= \nu(x) \wedge \nu(y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &= \theta_\mu(x,y) = (\theta_\mu \cap 1_{T\times T})(x,y)\end{aligned}$$

证毕. □

6.5.22 定理 一个半群 S 有 SFIEP 当且仅当 S 有 IEP.

证 设 T 是 S 的子半群且 I 是 T 的理想. 则 f_T 是 Fuzzy 子半群且 f_I 是 T 的 Fuzzy 理想. 由假设存在 S 的 Fuzzy 理想 ν 使得 $\nu \cap 1_T = 1_I$.

设 $J = \{x \mid \nu(x) = 1\}$. 则 J 是 S 的理想且 $J \cap T = T$. 事实上, 如果 $x \in J \cap T$. 则 $(\nu \cap f_T)(x) = 1 \Rightarrow f_I(x) = 1$, 即 $x \in I$. 反之, 如果 $x \in I$, 则 $(\nu \cap 1_T)(x) = 1_I(x) = 1$. 因此 $\nu(x) = 1, 1_T(x) = 1$, 故 $x \in T \cap J$.

反之, 设 T 是 S 的 Fuzzy 子半群且 ν 是 T 的 Fuzzy 理想. 对任意 $\lambda \in (0,1]$, 如果 $\nu_\lambda \neq \emptyset$, 则 ν_λ 是 T 的理想. 因为 S 具有 IEP, 则存在 S 的理想 μ_λ 使得 $\mu_\lambda \cap T = \nu_\lambda$. 设 $\mu = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda\mu_\lambda$. 因为 $\lambda\mu_\lambda(xy) \geqslant \lambda\mu_\lambda(x), \lambda\mu_\lambda(x), \forall x, y \in S$. 所以 μ 是 S 的 Fuzzy 理想. 进一步地, $\mu \cap f_T = \nu$. 事实上, 我们分两种情况讨论:

(1) 如果 $x \in T$, 则

$$\begin{aligned}(\mu \cap 1_T)(x) &= \mu(x) = \Big(\bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda\mu_\lambda\Big)(x) \\ &= \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda(T \cap \mu_\lambda)(x) = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda\nu_\lambda(x) = \nu(x).\end{aligned}$$

(2) 如果 $x \notin T$. 则 $(\mu \cap 1_T)(x) = \nu(x) = 0$. 证毕. □

6.6 逆半群的 Fuzzy 同余

本节我们从两个方面组织内容: 一方面通过引入 Fuzzy 核和 Fuzzy 迹的概念, 通过 Fuzzy 同余对的概念刻画逆半群上的 Fuzzy 同余. 另一方面给出逆半群上的 Fuzzy 幂等元分离同余和 Fuzzy 群同余.

一个正则半群 S 称为 *逆半群*, 如果 $E(S)$ 可换.

6.6.1 引理 假设 S 是正则半群, $a \in S$ 且 $\theta \in FC(S)$. 则下列各款等价:

(1) $a\theta \in E(S/\theta)$;

(2) $a\theta = e\theta, e \in E(S)$ 且 $Se \subseteq Sa, eS \subseteq aS$;

(3) $a\theta = e\theta$.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 假设 $a\theta \in E(S/\theta)$. 则 $a\theta = a\theta * a\theta = a^2\theta$. 设 x 是 a^2 的逆元, 即 $a^2 = a^2xa^2, x = xa^2x$. 令 $e = axa$, 则 $e^2 = axaaxa = a(xa^2x)a = axa = e \Rightarrow e \in E(S)$. 因此 $e\theta = (axa)\theta = a\theta * x\theta * a\theta = (a\theta)^2 * x\theta * (a\theta)^2 = a^2\theta * x\theta * a^2\theta = (a^2xa^2)\theta = a^2\theta = a\theta$. 另一方面, $eS = (axa)S = a[(xa)S] \subseteq aS$, 且 $Se = S(axa) = [S(ax)]a \subseteq Sa$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 假设 $a\theta = e\theta, e \in E(S)$. 则 $a\theta * a\theta = e\theta * e\theta = e\theta = a\theta \Rightarrow a\theta \in E(S/\theta)$. 证毕. □

6.6.2 性质 如果 S 是逆半群, θ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则下列各款成立:

(1) $(S/\theta, *)$ 是逆半群;

(2) $\theta(x^{-1}, y^{-1}) = \theta(x, y), \forall x, y \in S$.

证 (1) 对任意 $a\theta \in S/\theta, a \in S$, 因为 S 是正则的, 所以存在 $x \in S$ 使得 $a = axa$. 因此 $a\theta = (axa)\theta = a\theta * x\theta * a\theta$, 即 $(S/\theta, *)$ 是正则的. 假设 $a\theta, b\theta \in E(S/\theta)$. 根据引理 6.6.1, 存在 $e, e_1 \in E(S)$ 使得 $a\theta = e\theta, b\theta = e_1\theta$. 因为 S 是可逆的, 所以 $a\theta * b\theta = e\theta * e_1\theta = (ee_1)\theta = (e_1e)\theta = e_1\theta * e\theta = b\theta * a\theta$. 根据逆半群的定义, S/θ 是逆半群.

(2) 假设 θ 是 S 的 Fuzzy 同余, 假设 a^{-1} 是 a 的逆元, 不难看出 $a^{-1}\theta$ 是 $a\theta$ 的逆元, 记为 $(a\theta)^{-1}$. 因此对任意 $x, y \in S$, $\theta(x^{-1}, y^{-1}) = x^{-1}\theta(y^{-1}) = (x\theta)(y^{-1})^{-1} = (y^{-1}\theta(x))^{-1} = y\theta(x) = \theta(y, x) = \theta(x, y)$. 证毕. □

6.6.3 定义 逆半群 S 的一个 Fuzzy 子集 K 称为 S 的 Fuzzy *子半群*, 如果对任意 $x, y \in S$, $K(xy) \geqslant K(x) \wedge K(x)$ 且 $K(x) = K(x^{-1})$.

6.6.4 定义 设 θ 是逆半群 S 的 Fuzzy 同余, S 的一个 Fuzzy 子集 K_θ 称为 S 的 Fuzzy *核*, 如果对任意 $x \in S$, $K_\theta(x) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(x, e)$. S 的一个 Fuzzy 关系 T_θ 称为 S 的 Fuzzy *迹*, 如果对任意 $e, f \in E(S)$, $T_\theta(e, f) = \theta(e, f)$.

6.6.5 定义 逆半群 S 的一个 Fuzzy 子集 K 称为 Fuzzy *满* 的, 如果对任意 $e \in E(S)$, $K(e) = 1$. K 称为 Fuzzy *自共轭* 的, 如果对任意 $x, s \in S$, $K(s^{-1}xs) \geqslant K(x)$. 一个 Fuzzy 子半群称为 Fuzzy *正规* 的, 如果它既是 Fuzzy 满的又是 Fuzzy 自共轭的.

6.6.6 定义 $E(S)$ 上的一个 Fuzzy 同余 τ 称为 Fuzzy *正规同余*, 如果对任意 $e, f \in E(S), s \in S$ $\tau(s^{-1}es, s^{-1}fs) \geqslant \tau(e, f)$.

6.6.7 定义 逆半群 S 的一个对 (K, τ) 称为 S 的 Fuzzy *同余对*, 如果 K 是 S 的 Fuzzy 正规子半群, τ 是 $E(S)$ 上的 Fuzzy 正规同余且对任意 $x \in S, e \in E(S)$,

(1) $K(x) \geqslant K(xe) \wedge \tau(e, x^{-1}x)$;

(2) $\tau(xx^{-1}, x^{-1}x) \geqslant K(x)$.

6.6.8 引理　假设 θ 是逆半群 S 上的 Fuzzy 同余. 则 (K_θ, T_θ) 是 S 上的 Fuzzy 同余对.

证　(1) 对任意的 $x, y \in S$, $K_\theta(xy) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(xy, e)$. 因为 θ 是 S 上的 Fuzzy 同余, 所以 $\theta(xy, e_1e_2) \geqslant \theta(x, e_1) \wedge \theta(y, e_2), \forall e_1, e_2 \in E(S)$. 因为 $e_1e_2 \in E(S)$, 所以

$$
\begin{aligned}
K_\theta(xy) &\geqslant \theta(x, e_1) \wedge \theta(y, e_2) \geqslant \left(\bigvee_{e \in E(S)} \theta(x, e) \wedge \theta(y, e_2) \right) \\
&= K_\theta \wedge \theta(y, e_2) \geqslant K_\theta(x) \wedge \left(\bigvee_{e \in E(S)} \theta(y, e) \right) = K_\theta(x) \wedge K_\theta(y).
\end{aligned}
$$

进一步地,

$$
K_\theta(x) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(x, e) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(x^{-1}, e^{-1}) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(x^{-1}, e) = K_\theta(x^{-1}).
$$

因此 K_θ 是 S 的的 Fuzzy 子半群. 显然 $K_\theta(e) = 1, \forall e \in E(S)$ 且

$$
K_\theta(s^{-1}xs) = \bigvee_{e \in E(S)} \theta(s^{-1}xs, e) \geqslant \bigvee_{e \in E(S)} \theta(s^{-1}xs, s^{-1}es) \geqslant \bigvee_{e \in E(S)} \theta(x, e).
$$

以上证明了 K_θ 是 S 的 Fuzzy 正规子半群.

(2) 因为 θ 是 S 上的同余, $T_\theta(e, e_1) = \theta(e, e_1)$, 且

$$
T_\theta(s^{-1}es, s^{-1}e_1s) = \theta(s^{-1}es, s^{-1}e_1s) \geqslant \theta(e, e_1), \ \forall e, e_1 \in E(S), s \in S.
$$

所以 T_θ 是 $E(S)$ 上的 Fuzzy 正规同余.

(3) 因为 $K_\theta(x) \geqslant \theta(x, e) \geqslant \theta(xx^{-1}x, xe_0) \wedge \theta(xe_0, e) \geqslant \theta(x^{-1}x, e_0) \wedge \theta(xe_0, e)$, 所以 $K_\theta(x) \geqslant \theta(x^{-1}x, e_0) \wedge \bigvee_{e \in E(S)} \theta(xe_0, e)$. 因此 $K_\theta(x) \geqslant T_\theta(x^{-1}x, e_0) \wedge K_\theta(xe_0)$, $\forall x \in S, e_0 \in E(S)$.

(4) 因为

$$
\begin{aligned}
T_\theta(xx^{-1}, x^{-1}x) &= \theta(xx^{-1}, x^{-1}x) \\
&\geqslant \theta(xx^{-1}, e) \wedge \theta(e, x^{-1}x) = \theta(xx^{-1}, ee) \wedge \theta(ee, x^{-1}x) \\
&\geqslant \theta(x, e) \wedge \theta(x^{-1}, e) \wedge \theta(e, x^{-1}) \wedge \theta(e, x) = \theta(x, e) \wedge \theta(x^{-1}, e) \\
&= \theta(x, e) \quad (\theta(x^{-1}, e^{-1}) = \theta(x, e)).
\end{aligned}
$$

所以 $T_\theta(xx^{-1}, x^{-1}x) \geqslant K_\theta(x), \forall x \in S$.

综上各步骤, 我们完成了证明. 证毕. □

下面我们给出逆半群 S 上的 Fuzzy 同余对的性质.

6.6.9 性质 设 (K,τ) 是逆半群 S 的 Fuzzy 同余对. 则对任意 $a,b\in S, e\in E(S)$,

(1) $K(ab)\geqslant K(aeb)\wedge\tau(e,a^{-1}a)$;

(2) $K(aeb)\geqslant K(ab)$;

(3) $\tau(a^{-1}ea,b^{-1}eb)\geqslant K(ab^{-1})\wedge\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)$.

证 (1) 根据 Fuzzy 同余对的定义及 $b^{-1}eb\in E(S)$, $K(ab)\geqslant K(abb^{-1}eb)\wedge\tau(b^{-1}eb,b^{-1}a^{-1}ab)$. 因为 τ 是 Fuzzy 正规的, 所以 $\tau(b^{-1}eb,b^{-1}a^{-1}ab)\geqslant\tau(e,a^{-1}a)$. 由 $E(S)$ 是半格, 因此 $abb^{-1}eb=aebb^{-1}b=aeb$. 故 $K(ab)\geqslant K(aeb)\wedge\tau(e,a^{-1}a)$.

(2) $b^{-1}eb\in E(S)$ 且 K 是 Fuzzy 满的, 所以 $K(b^{-1}eb)=1$. 因此

$$K(aeb)=K(aebb^{-1}b)=K(abb^{-1}eb)\geqslant K(ab)\wedge K(b^{-1}eb)=K(ab).$$

(3) 因为 τ 是 Fuzzy 正规的, 所以

$$\begin{aligned}\tau(a^{-1}ea,a^{-1}eab^{-1}ba^{-1}ba^{-1}ea) &= \tau(a^{-1}ea(a^{-1}a)a^{-1}ea,a^{-1}eab^{-1}ba^{-1}ea)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\\ \tau(ab^{-1}ba^{-1},ba^{-1}ab^{-1}) &\geqslant K(ab^{-1}).(ab^{-1}e)^{-1}(ab^{-1}e))\\ &\geqslant K(ab^{-1}e).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\tau(a^{-1}ea,a^{-1}(eba^{-1})(ab^{-1}e)a) &\geqslant \tau(a^{-1}ea,a^{-1}eab^{-1}ba^{-1}ea)\\ &\quad\wedge\tau(a^{-1}eab^{-1}ba^{-1}ea,a^{-1}eb^{-1}a^{-1}ab^{-1}ea)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1}).\quad(*)\\ \tau(a^{-1}(eba^{-1}a^{-1})(ab^{-1}e)(eba^{-1})a) &\geqslant \tau((ab^{-1}e)^{-1}(ab^{-1}e),(ab^{-1}e)(ab^{-1}e)^{-1})\\ &= \tau((ab^{-1}e)(ab^{-1}e)^{-1},(ab^{-1}e)^{-1}(ab^{-1}e))\\ &\geqslant K(ab^{-1}e).\quad(**)\end{aligned}$$

根据式 (*) 和 (**), 我们有

$$\begin{aligned}\tau(a^{-1}ea,a^{-1}ab^{-1}eba^{-1}a) &= \tau(a^{-1}ea,a^{-1}(ab^{-1}e)(eba^{-1})a)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}ea,a^{-1}(eba^{-1})(ab^{-1}e)a)\\ &\quad\wedge\tau(a^{-1}(eba^{-1})(ab^{-1}e)a,a^{-1}(ab^{-1}e)(eba^{-1})a)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})\wedge K(ab^{-1}e)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1}).\quad(***)\\ \tau(a^{-1}ab^{-1}eba^{-1}a,b^{-1}eb) &= \tau(a^{-1}ab^{-1}eba^{-1}a,b^{-1}bb^{-1}ebb^{-1}b)\\ &\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\tau(b^{-1}eb,b^{-1}eb)\\ &= \tau(a^{-1}a,b^{-1}b.\quad(****)\end{aligned}$$

根据 (***) 和 (****),

$$\begin{aligned}\tau(a^{-1}ea,b^{-1}eb) &\geqslant \tau(a^{-1}ea,a^{-1}ab^{-1}eba^{-1})a)\wedge\tau(a^{-1}ab^{-1}eba^{-1})a,b^{-1}eb)\\&\geqslant \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})\wedge\tau(aa^{-1},bb^{-1})\\&=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1}).\end{aligned}$$

证毕. □

6.6.10 性质　假设 (K,τ) 是逆半群 S 的 Fuzzy 同余对. 则 Fuzzy 关系 $\mu_{(K,\tau)}$: $\mu_{(K,\tau)}(a,b)=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1}),\forall a,b\in S$ 是 S 上的 Fuzzy 同余.

证　记 $\theta=\mu_{(K,\tau)}$. 对任意 $a,b,c\in S$,

(1) 因为 K 是 Fuzzy 满的且 $aa^{-1}\in E(S)$, 所以 $K(aa^{-1})=1$. 因此 $\theta(a,a)=\tau(a^{-1}a,a^{-1}a)\wedge K(aa^{-1})=1$.

(2) 因为 K 又是 S 的 Fuzzy 子半群, 所以 $K(ba^{-1})=K((ba^{-1})^{-1})=K(ab^{-1})$. 因此

$$\theta(b,a)=\tau(b^{-1}b,a^{-1}a)\wedge K(ba^{-1})=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})=\theta(a,b).$$

(3) 我们注意到 $\tau(a^{-1}a,c^{-1}c)\geqslant\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\tau(b^{-1}b,c^{-1}c)$. 再根据性质 6.6.9(1), $K(ac^{-1})\geqslant K(a(b^{-1}b)c^{-1})\wedge\tau(b^{-1}b,a^{-1}a)$. 因此

$$\begin{aligned}\theta(a,c)&=\tau(a^{-1}a,c^{-1}c)\wedge K(ac^{-1})\\&\geqslant\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\tau(b^{-1}b,c^{-1}c)\wedge K(ab^{-1}bc^{-1})\wedge\tau(b^{-1}b,a^{-1}a)\\&\geqslant\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\tau(b^{-1}b,c^{-1}c)\wedge K(ab^{-1})\wedge K(bc^{-1})\\&=\theta(a,b)\wedge\theta(b,c).\end{aligned}$$

根据上面 (1),(2) 和 (3), 我们已经证明 θ 是 S 上的 Fuzzy 等价关系. 为了完成证明下面还需证明 θ 是 Fuzzy 左 (右) 相容的. 假设 $a,b,c\in S$, 因为 τ 是 $E(S)$ 上的 Fuzzy 正规同余且 $a^{-1}a,b^{-1}b\in E(S)$, 所以 $\tau(c^{-1}a^{-1}ac,c^{-1}b^{-1}bc)\geqslant\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)$. 根据性质 6.6.9(2), $K(acc^{-1}b^{-1})\geqslant K(ab^{-1})$. 因此

$$\theta(ac,bc)=\tau(c^{-1}a^{-1}ac,c^{-1}b^{-1}bc)\wedge K(acc^{-1}b^{-1})\geqslant\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})=\theta(a,b).$$

又因为 K 是 S 的 Fuzzy 正规子半群, 所以 $K(cab^{-1}c^{-1})\geqslant K(ab^{-1})$. 根据性质 6.6.9(3), $\tau(a^{-1}c^{-1}ca,b^{-1}c^{-1}cb)\geqslant K(ab^{-1})\wedge\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)$. 因此

$$\begin{aligned}\theta(ca,cb)&=\tau(a^{-1}c^{-1}ca,b^{-1}c^{-1}cb)\wedge K(cab^{-1}c^{-1})\\&\geqslant K(ab^{-1})\wedge\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})\\&=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})=\theta(a,b).\end{aligned}$$

同理我们可以证明 θ 是 Fuzzy 右相容的. 因此 $\mu_{(K,\tau)}$ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 证毕.

□

有了上面的准备之后，下面我们根据逆半群 S 上 Fuzzy 同余对，给出 S 上 Fuzzy 同余的刻画.

6.6.11 定理　假设 S 是逆半群. 如果 (K,τ) 是 S 上的 Fuzzy 同余对，则 $\theta=\mu_{(K,\tau)}$ 是 S 上唯一的 Fuzzy 同余使得 $K_\theta=K, T_\theta=\tau$. 反之，如果 μ 是 S 上的 Fuzzy 同余，则 (K_μ,T_μ) 是 S 的 Fuzzy 同余对且 $\mu_{(K_\mu,T_\mu)}=\mu$.

证　首先假设 (K,τ) 是 S 上的 Fuzzy 同余对，由性质 6.6.10, $\theta=\mu_{(K_\mu,T_\mu)}$ 是 S 上的 Fuzzy 同余. 为了证明 $K=K_\theta$, 设 $x\in S$, 则 $K_\theta(x)=\bigvee_{e\in E(S)}\theta(x,e)$. 根据 K 的定义， $\theta(x,e)=\tau(x^{-1}x,e^{-1}e)\wedge K(xe^{-1})=\tau(x^{-1}x,e)\wedge K(xe)\leqslant K(x)$. 因此 $K_\theta\leqslant K$.

另一方面，

$$
\begin{aligned}
K(x) &= \tau(x^{-1}x,x^{-1}x)\wedge K(x)=\tau(x^{-1}x,x^{-1}xx^{-1}x)\wedge K(xx^{-1}x)\\
&= \tau(x^{-1}x,x^{-1}x(x^{-1}x)^{-1})\wedge K(xx^{-1}x)=\theta(x,x^{-1}x)\leqslant K_\theta(x).
\end{aligned}
$$

因此 $K_\theta=K$. 为了证明 $T_\theta=\tau$, 设 $e,f\in E(S)$. 则

$$
T_\theta(e,f)=\theta(e,f)=\tau(e^{-1}e,f^{-1}f)\wedge K(ef^{-1})=\tau(e,f)\wedge 1=\tau(e,f).
$$

下面我们证明唯一性. 假设 ρ 是 S 的 Fuzzy 同余使得 $K_\rho=K, T_\rho=\tau$. 则

$$
\begin{aligned}
\rho(a,b) &= \rho(a,b)\wedge\rho(a,b)=\rho(a,b)\wedge\rho(a^{-1},b^{-1})\\
&\leqslant \rho(a^{-1}a,b^{-1}b)=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b).\\
K(ab^{-1}) &= K_\rho(ab^{-1})=\bigvee_{e\in E(S)}\rho(ab^{-1},e)\geqslant\rho(ab^{-1},bb^{-1})\geqslant\rho(a,b)\\
&\Rightarrow \theta(a,b)=\tau(a^{-1}a,bb^{-1})\wedge K(ab^{-1})\geqslant\rho(a,b)\wedge\rho(a,b)=\rho(a,b).
\end{aligned}
$$

为证明另一个反向不等式，我们注意到以下不等式成立：

$$
\begin{aligned}
\tau(a^{-1}a,b^{-1}b) &= \rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\leqslant\rho(aa^{-1}a,ab^{-1}b)=\rho(a,ab^{-1}b),\\
\rho(ab^{-1},e) &\leqslant \rho(ab^{-1}b,eb),\\
\rho(ab,eb) &\geqslant \rho(a,ab^{-1}b)\wedge\rho(ab^{-1}b,eb)\geqslant\rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\rho(ab^{-1},e),\\
\rho(a^{-1}a,b^{-1}b) &\leqslant \rho(ba^{-1}a,bb^{-1}b)=\rho(ba^{-1}a,b),\\
\rho(ab^{-1},e) &= \rho(ba^{-1},e^{-1})=\rho(ba^{-1},e)=\rho(ba^{-1}a,ea).
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}
\rho(b,ea) &\geqslant \rho(b,ba^{-1}a)\wedge\rho(ba^{-1}a,ea)\\
&\geqslant \rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\rho(ab^{-1},e),\\
\rho(a,ea) &\geqslant \rho(a,eb)\wedge\rho(eb,ea)=\rho(a,eb)\wedge\rho(eb,eea)\\
&\geqslant \rho(a,eb)\wedge\rho(b,ea)\geqslant\rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\rho(ab^{-1},e),\\
\rho(a,b) &\geqslant \rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\rho(ab^{-1},e)\\
&\Rightarrow \rho(a,b)\geqslant\rho(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge\bigvee_{e\in E(S)}\rho(ab^{-1},e)\\
&= \tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K_\theta(ab^{-1})=\tau(a^{-1}a,b^{-1}b)\wedge K(ab^{-1})=\theta(a,b).
\end{aligned}$$

因此 $\theta=\rho$.

反之，设 μ 是 S 上的 Fuzzy 同余，根据引理 6.6.8, (K_μ,T_μ) 是 S 上的 Fuzzy 同余对. 从上面唯一性的证明中我们已经得出 $\mu_{(K_\mu,T_\mu)}=\mu$. 证毕. □

下面我们给出逆半群 S 上的 Fuzzy 幂等元分离同余和 Fuzzy 群同余.

6.6.12 定义 设 S 是逆半群, $\mu\in FC(S)$. μ 称为 S 的 Fuzzy 幂等元分离同余, 如果对任意 $e,e_1\in E(S)$, $e\mu=e_1\mu\Rightarrow e=e_1$. μ 称为 S 的 Fuzzy 群同余, 如果 $(S/\mu,*)$ 是群.

为了方便起见，我们引用下列两个引理.

6.6.13 引理 [25] 假设 S 是逆半群. S 上的二元关系

$$\eta:=\{(a,b)\in S\times S\mid a^{-1}ea=b^{-1}eb,\forall e\in E(S)\}.$$

是 S 上的最大的幂等元分离同余.

6.6.14 引理 [25] 假设 S 是逆半群. S 上的二元关系

$$\sigma:=\{(a,b)\in S\times S\mid ea=eb,\forall e\in E(S)\}$$

是 S 上的最小的群同余.

下面两个定理容易证明，我们不妨留作练习.

6.6.15 定理 假设 S 是逆半群. 则 f_η 是 S 上的 Fuzzy 幂等元分离同余.

6.6.16 定理 假设 S 是逆半群. 则 f_σ 是 S 上的 Fuzzy 群同余.

6.6.17 定理 假设 μ 是逆半群 S 上的 Fuzzy 同余关系. μ 是 Fuzzy 幂等元分离同余当且仅当 $\mu^{-1}\leqslant\eta$.

证 假定 μ 是 S 上 Fuzzy 幂等元分离同余且 $(a,b)\in\mu^{-1}$. 则 $\mu(a,b)=1$. 设

$e \in E(S)$. 则

$$\begin{aligned}\mu(a^{-1}ea, b^{-1}eb) &\geqslant (\mu \circ \mu)(a^{-1}ea, b^{-1}eb) \\ &= \sup_{x \in S}[\min\{\mu(a^{-1}ea, x), \mu(x, b^{-1}eb)\}] \\ &\geqslant \min\{\mu(a^{-1}ea, b^{-1}eb), \mu(b^{-1}eb, b^{-1}eb)\} \\ &\geqslant \min\{\mu(a^{-1}, b^{-1}), \mu(a, b)\} = 1.\end{aligned}$$

因此 $\mu(a^{-1}ea, b^{-1}eb) = 1$, 即 $(a^{-1}ea)\mu = (b^{-1}eb)\mu$. 因为 μ 是 Fuzzy 幂等元分离的同余且 $a^{-1}ea, b^{-1}eb \in E(S)$, 所以 $a^{-1}ea = b^{-1}eb \Rightarrow (a, b) \in \eta$.

反之，假设 $\mu^{-1} \leqslant \eta$. 对任意 $e, e_1 \in E(S)$, 如果 $e\mu = e_1\mu$, 则 $\mu(e, e_1) = 1$. 因此 $(e, e_1) \in \mu^{-1} \leqslant \eta$. 因为 η 是 S 的幂等元分离同余，所以 $e = e_1$. 证毕. □

6.6.18 定理　假设 μ 是逆半群 S 上的 Fuzzy 同余关系. μ 是 Fuzzy 群同余当且仅当 $\sigma \leqslant \mu^{-1}$.

证　假定 μ 是 S 上 Fuzzy 群同余且 $(a, b) \in \sigma$. 则存在 $e \in E(S)$ 使得 $ea = eb$. 因为 $(S/\mu, *)$ 是群，所以 $a\mu = e\mu * a\mu = (ea)\mu = (eb)\mu = e\mu * b\mu = b\mu$. 因此 $(a, b) \in \mu^{-1}$. 故 $\sigma \leqslant \mu^{-1}$.

反之，假设 $\sigma \leqslant \mu^{-1}$, $e, e_1 \in E(S)$. 则 $ee_1e \in E(S)$ 且 $(ee_1e)e_1 = (ee_1e)e$, 这意味着 $(e, e_1) \in \sigma$, 因此 $(e, e_1) \in \mu^{-1} \Rightarrow e\mu = e_1\mu$. 故 $(S/\mu, *)$ 是群. 证毕. □

6.7　T^*- 纯半群上的 Fuzzy 同余

上节我们已经知道，假设 S 为半群，α 是 S 上的 Fuzzy 同余，如果 $(S/\alpha, *)$ 是群，α 称为 S 的 Fuzzy 群同余；如果 $(S/\alpha, *)$ 是半格，α 称为 S 的 Fuzzy 半格同余. S 的双理想 A 称为 *T-纯* 的，如果 $A \cap xSy = xAy, \forall x, y \in S$. 如果 S 的每个双理想均为 T- 纯的，S 称为 *T^*-纯* 的. T^*- 纯半群的研究主要是 Kuroki [*Comment. Math. Univ. St. Pauli* 31:115~128(1982)], 我们这里有些直接就引用了. 本节主要给出 T^*- 纯半群的相关性质，重点讨论 T^*- 纯半群上的 Fuzzy 群同余和 Fuzzy 半格同余.

6.7.1 引理　假设 S 是 T^*- 纯半群，$a, b \in S$. 则下列各款成立：

(1) $aSb = a^2Sb^2$;

(2) $abSab = baSba$.

证　(1) 因为 aSb 是 S 的双理想，所以 $aSb \cap aSb = aSb = a(aSb)b = a^2Sb^2$.

(2) 因为双理想 $abSab, baSba$ 是 T- 纯的，根据 (1), 所以 $abSab = (ab)^2S(ab)^2 = a(ba)(bSa)(ba)b \subseteq a(ba)S(ba)b = baSba \cap aSb \subset baSba$. 同理可以证明 $baSba \subseteq abSab$. 证毕. □

6.7.2 定理　假设 S 是 T^*- 纯半群. 则 $a^n(n \geqslant 3, a \in S)$ 是 S 的完全正则元.

证　$a^n = aa^{n-2}a \in aSa = (a^n)^2S(a^n)^2$. 证毕. □

根据定理 6.7.2, 我们知道 T^*- 纯半群的幂等元集 $E(S) \neq \emptyset$.

6.7.3 引理　设 S 是 T^*- 纯半群. 则 $E(S)$ 属于 S 的中心 $C(S)$.

证　假设 $e \in E(S)$, $\forall a \in S$. 因为 S 是 T^*- 纯半群, eSe 是 S 的双理想, 所以 $ae = aeeee \in a(eSe)e = eSe \cap aSe \subseteq eSe$. 因此存在 $x \in S$ 使得 $ae = exe$. 同理, 可以证明存在 $y \in S$ 使得 $ea = eye$. 因此 $ae = exe = (ee)(xe) = e(exe) = e(ae) = (ea)e = (eye)e = eye = ea$. 故 $e \in C(S)$. 证毕. □

6.7.4 定理　设 S 是 T^*- 纯半群. 则 S 是弱可换的.

证　假设 $a, b \in S$, 因为 S 是 T^*- 纯半群且 bSb 是 S 的双理想, 所以 $(ab)^3 \in a(bSba)b = bSba \cap aSb \subseteq bSba \subseteq bSa$. 因此 S 是弱可换的. 证毕. □

根据定理 6.7.4 和文献 [79], T^*- 纯半群一定是阿基米德半群的半格.

6.7.5 定理　一个半群是 T^*- 纯半群当且仅当 S^3 是群半格.

证　假设 S 是 T^*- 纯的, $a \in S^3$. 则 $a = bcd \in bSd = b^3Sd^3$, 因此存在 $x \in S$ 使得 $a = b^3xd^3$. 根据定理 6.7.2, b^3, d^3 是完全正则的, 所以存在 $y, z \in S$ 使得 $b^3 = b^3yb^3, d^3 = d^3zd^3$. 因为 aS^3a 是 S 的双理想, 所以 $a = b^3xd^3 = (b^3yd^3)x(d^3zd^3) = (b^3y)(d^3xd^3)(zd^3) = (b^3y)a(zd^3) \in (b^3y)(aSd)d^2 = (b^3y)(a^5Sd^5)d^2 \subseteq (b^3y)(aS^3a)d^7 = aS^3a \cap (b^3y)Sd^7 \subseteq aS^3a$. 因此 S^3 是正则半群.

另一方面, 对任意 $a \in S$, $aS^3 \subseteq (aS^3aS^3a)S^3 = aS^3(aS^3a)S^3 = aS^3a \cap aS^3Ss^3 \subseteq aS^3a \subseteq S^3a$, 同理可证 $S^3a \subseteq aS^3$. 根据引理 5.4.1, S^3 是群半格.

反之, 假设 S^3 是群半格, A 是 S 的任意双理想, 下面我们证明 A 是 T- 纯的. 事实上, 假设 x, y 是 S 的任意元素, 设 $a \in A \cap xSy$, 则存在 $s \in S$ 使得 $a = xsy$. 因为 $a \in S^3$ 且 S^3 是正则的, 因此

$$\begin{aligned} a &\in aS^3aS^3aS^3a = (xsy)S^3aS^3aS^3(xsy) \\ &= x\{(sy)S^3a\}S^3\{a(S^3xs)y\} \subseteq x(S^3a)S^3(aS^3)y = x(aS^3)S^3(aS^3)y \\ &\subseteq x(ASA)y \subseteq xAy. \end{aligned}$$

因此 $A \cap xSy \subseteq xAy$.

假设 $k \in xAy$, 则存在 $a \in A$ 使得 $k = xay$. 根据引理 6.7.1, $k = xay \in xSy = x^3Sy^3$, 因此存在 $z \in S$ 使得 $k = x^3zy^3$. 又因为 x^3、y^3 均为正则元, 所以存在 $b, c \in S$ 使得 $x^3 = x^3bx^3, y^3 - y^3cy^3$. 因此

$$\begin{aligned} k &= x^3zy^3 = (x^3bx^3)z(y^3cy^3) = (x^3b)(x^3zy^3)(cy^3) \\ &- (x^3b)(xay)(cy^3) \in (x^3b)(xay)S^3(xay)(cy^3) = \{(x^3bx)a\}(yS^3x)\{(a(ycy^3)\} \\ &\subseteq (S^3a)S(aS^3) = (aS^3)S(S^3a) = a(S^3SS^3)a \subseteq ASA \subseteq A. \end{aligned}$$

因此 $xAy \subseteq A$. 因为 $xAy \subseteq xSy$, 所以 $xAy \subset A \cap xSy$. 根据 T- 纯双理想的定义, A 是 T- 纯的. 证毕. □

6.7.6 定理　假设 S 是 T^*- 纯半群, σ 是 S 上的二元关系, 定义如下:

$$\sigma := \{(a,b) \in S \times S \mid a^3 \in bSb \text{ 且 } b^3 \in aSa\}.$$

则 σ 是 S 的最小半格同余.

证　由 σ 的定义, σ 是自反和对称的. 设 $(a,b),(b,c) \in \sigma$, 则 $a^3 \in bSb$, $b^3 \in aSa$, $b^3 \in cSc, c^3 \in bSb$. 根据引理 6.7.1,

$$a^3 \in bSb = b^3Sb^3 \subseteq (cSc)S(cSc) = c(ScScS)c \subseteq cSc;$$
$$c^3 \in bSb = b^3Sb^3 \subseteq (aSa)S(aSa) = a(SaSaS)a \subseteq aSa.$$

因此 $(a,c) \in \sigma$. 故 σ 是传递的. 为了证明 σ 是相容的, 设 $(a,b) \in \sigma, x \in S$. 因为 $axSbx$ 是 S 的双理想, 所以

$$\begin{aligned}(ax)^3 &= axaxax \in ax(aSa)x = ax(a^3Sa^3)x \subseteq ax(bSb)S(bSb)x \\ &= a(xb)(SbSbSbS)(bx) \subseteq a(xbSbx) = a(xb)^2S(bx)^2 = ax(bx)(bS)(bx)bx \\ &\subseteq ax(bxSbx)bx = bxSbx \cap axSbx \subseteq bxSbx.\end{aligned}$$

相似地, 我们有 $(bx)^3 \in axSax$. 因此 $(ax,bx) \in \sigma$. 同理可证 $(xa,xb) \in \sigma$. 以上证明了 σ 是 S 上的同余. 对任意的 $a,b \in S$, 因为 $a^3 \in aSa = a^2Sa^2, (a^2)^3 = aa^4a \in aSa$, 所以 $(a,a^2) \in \sigma$. 又因为

$$\begin{aligned}(ab)^3 &\in abSab = (ab)^2S(ab)^2 = a(ba)(bSa)(ba)b \\ &\subseteq a(baSba)b = aSb \cap baSba \subseteq baSba.\end{aligned}$$

类似地可以证明 $(ba)^3 \in abSab$. 因此 $(ab,ba) \in \sigma$. 综合以上的证明, σ 是 S 的半格同余. 进一步地, 如果 β 也是 S 的半格同余, 对任意 $(a,b) \in \sigma$, 则存在 $x,y \in S$ 使得 $a^3 = bxb, b^3 = aya$. 因此 $a\beta = (a\beta)^3 = a^3\beta = (bxb)\beta = (b\beta)((xb)\beta) = (b^2\beta)((xb)\beta) = (b\beta)((b\beta)((bx)\beta))) = (b\beta)((bxb)\beta) = (b\beta)(a^3\beta) = (b\beta)(a\beta)^3 = (b\beta)(a\beta) = (b\beta)^3(a\beta) = (b^3\beta)(a\beta) = ((aya)\beta)(a\beta) = ((ay)\beta)(a\beta)^2 = (aya)\beta = (b^3\beta) = (b\beta)^3 = b\beta$. 故 $(a,b) \in \beta \Rightarrow \sigma \leqslant \beta$. 证毕. □

假设 α 是 S 的同余, 则 α 的特征函数 f_α 是 S 上的 Fuzzy 同余且 $(S/f_\alpha,*)$ 是半群. 如果 α 是 S 的群 (半格) 同余, 则 α 的特征函数 f_α 是 S 上的 Fuzzy 群 (半格) 同余.

6.7.7 练习　假设 α 是半群 S 的同余. 证明半群 S/α 和半群 S/f_α 同构.

6.7.8 定理　假设 ρ 是 T^*- 纯半群, β 是 S 上的 Fuzzy 同余且 $f_\sigma \leqslant \beta$. 则 β 是 S 的 Fuzzy 半格同余.

证 假设 $a,b\in S$. 因为 $(a,a^2)\in\sigma$, 所以 $\beta(a,a^2)\geqslant f_\sigma(a,a^2)=1$. 因此 $a\beta=a^2\beta=(a\beta)^2$. 另一方面, 因为 $\beta(ab,ba)\geqslant f_\sigma(ab,ba)=1$, 所以 $(ab)\beta=a\beta*b\beta=b\beta*a\beta=(ba)\beta$. 证毕. □

6.7.9 定理 假设 ρ 是 T^*- 纯半群, β 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则下列各款等价:

(1) β 是半群 S 的半格同余;

(2) $(\forall a,b\in S)\ (a,b)\in\sigma\Rightarrow a\beta=b\beta((a,b)\in\beta^{-1})$.

证 假设 (1) 成立. 对任意 $a,b\in S$ 使得 $(a,b)\in\sigma$. 存在 $x,y\in S$ 使得 $a^3=bxb, b^3=aya$. 因为 β 是 S 的 Fuzzy 半格同余, 所以

$$\begin{aligned}a\beta&=(a\beta)^3=a^3\beta=bxb\beta=(b\beta)*(xb)\beta\\&=(b\beta)^2*(xb)\beta=b\beta*(bxb)\beta=b\beta*(a\beta)^3=(b\beta)*(a\beta)\\&=(b\beta)^3*(a\beta)=b^3\beta*a\beta=(aya)\beta*a\beta=(ay)\beta*(a\beta)^2\\&=(ay)\beta*a\beta=(aya)\beta=b^3\beta=(b\beta)^3=b\beta.\end{aligned}$$

因此 $(a,b)\in\sigma$. 以上证明了 (1) 推 (2). 反之, 假设 (2) 成立且 a,b 是 S 的任意两个元素. 因为 $(a,a^2),(ab,ba)\in\sigma$, 所以 $a\beta=a^2\beta=(a\beta)^2,(ab)\beta=a\beta*b\beta=b\beta*a\beta=(ba)\beta$. 这意味着 S/β 是半格, 即 β 是 S 的 Fuzzy 半格同余. 证毕. □

6.7.10 引理 假设 δ 是 T^*- 纯半群 S 上的如下定义的同余:

$$\delta:=\{(a,b)\in S\times S\mid ea=eb,e\in E(S)\}.$$

则 δ 是 S 上的最小群同余.

证 根据定理 6.7.5, $E(S)\neq\emptyset$. δ 显然是自反和对称的. 假设 $(a,b)\in\delta,(b,c)\in\delta,a,b,c\in S$. 则存在 $e,e_1\in E(S)$ 使得 $ea=eb,e_1b=e_2c$. 根据引理 6.7.3, $ee_1\in E(S)$. 因此 $(e_1e)a=e_1(ea)=e_1(eb)=(e_1e)b=(ee_1)b=e(e_1b)=e(e_1)c=(e_1e)c\Rightarrow(a,c)\in\delta$. 故 δ 是传递的.

假设 $a,b\in S,(a,b)\in\delta,x\in S$. 则存在 $e\in E(S)$ 使得 $ea=eb$. 因此, 根据定理 6.7.3, $e(xa)=(ex)a=(xe)a=x(ea)=x(eb)=(xe)b=(ex)b=e(xb)\Rightarrow(xa,xb)\in\delta$. 显然 $(ax,bx)\in\delta$. 因此 δ 是 S 的同余.

下面我们证明 δ 是 S 的群同余. 任取 $e,e_1\in E(S)$, $(ee_1)e=e(e_1e)=e(ee_1)=ee_1=e(e_1e_1)=(ee_1)e_1$. 因为 $ee_1\in E(S)$, 所以 $(e,e_1)\in\delta\Rightarrow e\delta=e_1\delta$. 对任意 $a\in S$, 因为 $ea=(ee)a=e(ea)$, 所以 $(e,ea)\in\delta\Rightarrow(ea)\delta=e\delta\Rightarrow e\delta*a\delta=a\delta$. 进一步地, 根据定理 6.7.5, a^3 是 S 的正则元. 因此存在 $x\in S$ 使得 $a^3=a^3xa^3$. 我们注意到 $xa^3\in E(S)$. 因此 $((xa^2)\delta)*(a\delta)=(xa^3)\delta=e\delta$. 故 δ 是 S 的群同余.

假设 μ 是 S 的群同余, $(a,b)\in\delta$. 则存在 $e\in E(S)$ 使得 $ea=eb$. 因此,

$(e\mu)(a\mu) = (ea)\mu = (eb)\mu = (e\mu)(b\mu)$. 因为 $e\mu \in E(S/\mu)$ 且 S/μ 是群，所以 $e\mu$ 是 S/μ 的单位元. 因此 $a\mu = b\mu \Rightarrow (a,b) \in \mu \Rightarrow \delta \leqslant \mu$. 证毕. □

根据以上练习和引理 6.7.10, f_δ 一定是 S 上的 Fuzzy 群同余.

6.7.11 定理 假设 α 是 T^*- 纯半群的 Fuzzy 同余. 如果 $a\alpha, a \in S$ 是半群 S/α 的幂等元. 则存在 S 的幂等元 e 使得 $e\alpha = a\alpha$.

证 如果 $a\alpha, a \in S$ 是半群 S/α 的幂等元，则 $a\alpha = (a\alpha) * (a\alpha) = (a\alpha) * (a\alpha) * (a\alpha) * (a\alpha) = a^4\alpha$. 因为 aSa 是 S 的双理想，且因为 S 是 T^*- 纯半群，所以 $a^4 \in aSa = aSa \cap aSa = a(aSa)a = a^2Sa^2 = a^2Sa^2 \cap a^2Sa^2 = a^2(a^2Sa^2)a^2 = a^4Sa^4$. 因此 a^4 是 S 的正则元. 设 x 为 a^4 的逆. $a^4xa^4 = a^4, xa^4x = x$. 令 $e = a^2xa^2$, 则 $e^2 = (a^2xa^2)(a^2xa^2) = a^2(xa^4x)a^2 = a^2xa^2 = e$. 因此 e 是 S 的幂等元，且

$$
\begin{aligned}
e\alpha &= (a^2xa^2)\alpha = (a^2\alpha) * (x\alpha) * (a^2\alpha) = (a\alpha)^2 * (x\alpha) * (a\alpha)^2 \\
&= (a\alpha)^4 * (x\alpha) * (a\alpha)^4 = (a^4\alpha) * (x\alpha) * (a^4\alpha) = (a^4xa^4)\alpha = (a\alpha)^4 = a\alpha.
\end{aligned}
$$

证毕. □

6.7.12 定理 假设 α 是 T^*- 纯半群的 Fuzzy 同余. 如果 $f_\delta \leqslant \alpha$, 则 α 是 S 上 Fuzzy 群同余.

证 假设 e, e_1 是 S 的幂等元，如同定理 6.7.10 的证明，$(e, e_1) \in \delta$. 因此 $\alpha(e, e_1) \geqslant f_\delta(e, e_1) = 1 \Rightarrow \alpha(e, e_1) = 1 \Rightarrow e\alpha = e_1\alpha$. 对任意 $e \in E(S)$, 因为 $e(ea) = (ee)a = ea$, 所以 $(ea, a) \in \delta \Rightarrow \delta(ea, a) = 1$. 又因为 $\alpha(ea, a) \geqslant \delta(ea, a) = 1 \Rightarrow \alpha(ea, a) = 1 \Rightarrow (ea)\alpha = a\alpha$, 即 $e\alpha * a\alpha = a\alpha$. 因此 $e\alpha$ 是 S/α 的左单位元. 进一步地，根据定理 6.7.5, a^3 是 S 的正则元. 因此存在 $x \in S$ 使得 $a^3 = a^3xa^3$. 我们注意到 $xa^3 \in E(S)$. 因此 $((xa^2)\alpha) * (a\alpha) = (xa^3)\alpha = e\delta$, $xa^2\alpha$ 是 $a\alpha$ 在 S 中的左逆元. 故 α 是 S 的群同余. 证毕. □

6.7.13 定理 假设 S 是 T^*- 纯半群，β 是 S 上的 Fuzzy 同余. 则下列各款等价：

(1) β 是半群 S 的群同余；

(2) $(\forall a, b \in S)\ (a,b) \in \delta \Rightarrow a\beta = b\beta((a,b) \in \beta^{-1})$.

证 假设 (1) 成立. 对任意 $a, b \in S$ 使得 $(a,b) \in \delta$, 存在 $e \in E(S)$ 使得 $ea = eb$ 因为 β 是 S 的 Fuzzy 群同余，所以 $e\beta$ 是 S/β 的单位元. 因此

$$
a\beta = e\beta * a\beta = (ea)\beta = (eb)\beta = e\beta * b\beta = b\beta \Rightarrow (a,b) \in \beta.
$$

以上证明了 (1) 推 (2). 反之，假设 (2) 成立且 $(a,b) \in \delta$, 则 $f_\delta(a,b) = 1$. 另一方面，根据假设 $(a,b) \in \beta$, 因此 $\beta(a,b) = f_\delta(a,b)$ 如果 $(a,b) \notin \delta$, 显然 $\beta(a,b) \geqslant f_\delta(a,b)$. 故 $f_\delta \leqslant \beta$. 根据定理 7.6.12, 即 β 是 S 的 Fuzzy 群同余. 证毕. □

6.8 评　述

尤如著名的半群理论家 Howie 所说：半群的同余理论是半群理论中最深刻和最精彩的部分. 集合上的 Fuzzy 关系引入之后，为了研究一个代数结构的 Fuzzy 商结构，我们很自然地要考虑代数系统 (X,Ω) 上 Fuzzy 等价关系与 X 的运算集 Ω 的相容性，即引入 Fuzzy 同余的概念. 这方面工作开展主要集中在群和半群这两个代数系统. 我们知道一个群 G 的同余集 $C(G)$ 与它的正规子群集 $N(S)$ 之间存在一一对应，即一个群 G 的同余和 G 的一个正规子群互相确定. 1992 年，Kuroki[37] 证明 G 的 Fuzzy 正规子群集 $FN(G)$ 和 G 的 Fuzzy 同余集 $FC(G)$ 之间存在一一对应关系，且 $FN(G)$ 和 $FC(G)$ 关于各自的乘法运算构成半格. 和这项工作类似，但侧重点不同的工作很多，例如 Makamba 和 Murali 在 1992 年的工作 [70]、1994 年 Samhan[97] 和 Ahsanullah[96] 讨论了群环上的 Fuzzy 正规子群 (Fuzzy 理想) 与它们的同余之间的相互确定，1997 年，Kim 和 Bae[43] 证明了 G 的 Fuzzy 同余集 $FC(G)$ 关于通常的交和并运算是一个模格且 $FN(G)$ 与 $FC(G)$ 之间是格同构，类似的工作还有文献 [2,3,4]. 所有关于 $FN(G)$ 与 $FC(G)$ 及它们之间关系的研究或多或少有这样或那样的缺憾. 例如，在格论方面什么是格 $FC(G)$ 和 $FN(G)$ 最重要的特征？基于这方面的目的，1994 年，Ajmal 和 Thomas[4] 在自己 [3,4] 和他人以前工作的基础上，将 Fuzzy 同余中的自反性改为 t- 自反性，即从而引入群的 t-Fuzzy 同余概念. 之所以这样改变是基于以下理由：

(1) 使我们更深刻地认识到一个给定群 G 的 Fuzzy 同余与 Fuzzy 等价关系的结构及其相互关系，同时能够建立起 G 的 Fuzzy 同余集与 Fuzzy 正规子群集之间的更加完美的结合.

(2) 统一了早期很多作者在该方向上各自的工作，建立了自然的对应关系，即 Fuzzy 同余子格与 Fuzzy 等价关系集，Fuzzy 正规子群子格与 Fuzzy 子群集之间. 从而，Fuzzy 同余格的层次感明显，内容更加丰富.

当然我们还可以从其他侧面来研究带有群结构的 Fuzzy 同余，例如我们可以考虑 Γ- 群上 Fuzzy 同余的特点和刻画 [121]，还有通过 G 的 Fuzzy 同余的性质来刻画 G 的结构，这是研究 G 上 Fuzzy 同余的关键，对此 Wu[106] 给出了带有 Fuzzy 同余扩张性质的 G 的刻画.

假设我们考虑的代数系统是带有半群结构的一个系统. 对于半群上的 Fuzzy 同余，1993 年，Samhan[97] 仿照半群上一个关系生成同余关系的方法，给出了由半群 S 的一个 Fuzzy 关系生成 Fuzzy 同余的详细描述. 和群 G 的 Fuzzy 同余格 $FC(G)$ 不同的是，$FC(S)$ 一般不是模格. 但是，如果 $FC(S)$ 中任意两个元素关于乘法可换，则 $FC(S)$ 是模格. 关于 S 上 Fuzzy 二元关系生成 Fuzzy 同余的问题，Tan[100]

在格值 Fuzzy 二元关系上也做了类似的工作. 我们知道半群 S 中理想集与半群的同余格之间是没有一一对应关系的, 但和 S 的 Rees 同余之间有一一对应关系. 1999 年, Xie[115] 在半群 S 中引入一类特殊的 Fuzzy 同余, Fuzzy Rees 同余. 我们证明了 Fuzzy Rees 同余与 S 的 Fuzzy 理想相互决定.

在引入了半群 S 通过 Fuzzy 同余的商半群 [36] 之后, 基于这样的思想 Kuroki[35] 将半群的同态基本定理推广到更一般的, 而且内涵更丰富的同态定理, 后来 Li[54] 也进一步地做了一些更细致的工作. 类似于半群同余的研究方向, 我们需要寻求半群 Fuzzy 同余本身的描述, 也需研究 Fuzzy 同余性质对半群结构的影响, 近年来人们主要考虑了逆半群 Fuzzy 同余的刻画, 进一步地, 正则半群 Fuzzy 同余的性质等. 当然我们考虑一些特殊半群上 Fuzzy 同余的特征和半群上的特殊的 Fuzzy 同余. 例如, 1995 年, Kuroki[36] 研究了 T^* - 纯半群上的 Fuzzy 同余. 半群上的特殊的 Fuzzy 同余包括 Fuzzy 群同余, Fuzzy 半格同余, Fuzzy 幂等元分离同余等.

设 S 为逆半群. 我们知道, 核 - 迹 (Kernel-Trace) 方法是逆半群一般同余的一个非常成功的刻画方法. 1993 年, Al-Thukair[5] 成功地在逆半群 S 上引入 Fuzzy 核与 Fuzzy 迹, 用 Fuzzy 同余对给出了 S 上 Fuzzy 同余的表示. 作为 Al-Thukair 工作的进一步深入, 1997 年 Das[18] 证明存在 S 的 Fuzzy 同余格到 $E(S)$ 的 Fuzzy 正规同余格之间的满同态映射. Zhang[137] 证明一个正则半群的 Fuzzy 群同余集与 S 的 Fuzzy 内酉子半群集之间存在一一对应. Li 等通过引入正则半群的 Fuzzy 半正规子半群来刻画 S 上的 Fuzzy 群同余 [55]. 仿照逆半群上 Fuzzy 同余对的引入, Li 等在正则半群上引入 Fuzzy 同余对得到类似于 [5] 的结论 [53], 当然还可以引入 Fuzzy 同余三元组的概念 [56] 来刻画正则半群上的 Fuzzy 同余. 正则半群 S 的 Fuzzy 子集在什么情况下能成为 S 的 Fuzzy 核, Li 等在文献 [57] 中给出了详细的描述. Tan[105] 给出了正则半群的 Fuzzy 同余格的性质, 证明了正则半群的 Fuzzy 同样格是某个格的模子格的无交并.

一般半群 Fuzzy 同余的研究不是容易深入的事. Li 等 [57] 引入纯整半群上的 Fuzzy 核正规系以此给出纯整半群上 Fuzzy 同样的刻画. Xie[117] 讨论了半群 S 上的 Fuzzy 同余扩张性质, Zuo[143] 将文献 [117] 中的一些基本结果推广到 Fuzzy 半群上. 当然研究者还可以从另一个角度出发, 即将 "Fuzzy" 改为 "L-Fuzzy". 这样做平移的成份很多, 但也有不少新的内涵 [100], 特别是 Tan[99,101] 将 Green 关系推广到 Fuzzy Green 关系, 为半群的 Fuzzy 理论奠定了良好的基础.

第 7 章　粗糙集代数初步与半群

粗糙集 (Rough set) 理论，也称 RS 理论，是一种处理不精确、不确定与不完全数据的新的数学理论，由波兰数学家 Zdzislaw Pawlak 在 20 世纪 80 年代初提出. 这套理论认为如果自然界离散表示的对象设为 U, 人们具有关于 U 的认识能力或称为知识就是人们对 U 的划分或分类能力. 谈及分类，在数学上有个基本概念——等价关系. 设 R 为 U 上的等价关系， R 就给出了 U 上的一个划分或称分类，这样 RS 理论首创将知识与分类联系起来，并通过概念知识库 $K=(U,R)$ 给 RS 理论以一个很好的纯数学理论和方法的依托. 为了更好地描述人们掌握的知识对已有知识库 K 的吻合程度， RS 理论引入了上近似和下近似的概念来描述 U 中一个子集 X 对 $K=(U,R)$ 的粗糙程度，粗集概念由此产生.

RS 理论开始仅局限在东欧各国，并未引起国际计算机学界和数学界的重视. 直至 20 世纪 80 年代末，世界各国计算机学者开始关注这一新理论的发展. 1992 年在波兰 Kiekrz 召开了第一届国际 RS 研讨会； 1993 年在加拿大的 Banff 召开了第二届国际 RS 理论与知识发现研讨会； 1996 年在东京召开了第五届 RS 理论学术会议. 中国 2001 年在重庆， 2002 年在苏州， 2003 年又在重庆分别召开了第一、二、三届 RS 理论与软计算学术研讨会. 1995 年 ACM Communication 将其列为新浮现的计算机科学的研究课题， 1998 年 Information Science 为 RS 理论出版了一期专辑. 对 RS 理论国内有很多综述报告发表并出版了四本专著.

本章分四节分别讨论 Pawlak 粗代数的基本性质，粗代数的公理化，粗集与 Fuzzy 集的关系及半群中的粗糙集思想. 本章的最后一节对粗糙集代数的发展情况给出了一个简要的综述.

7.1　Pawlak 粗糙代数

设 U 为非空有限集， R 为 U 上的二元等价关系. 序对 (U,R) 称为近似空间. 设 $X\subseteq U$, 我们定义 U 上的两个一元算子.

7.1.1 定义　设 (U,R) 为近似空间.

$$\underline{\mathrm{apr}}X=\{a\in U\mid [a]_R\subseteq X\};$$

$$\overline{\mathrm{apr}}X=\{a\in U\mid [a]_R\cap X\neq\emptyset\},$$

分别称之为 X 关于 R 的下近似和上近似.

7.1.2 注　在近似空间 (U,R) 中，U 中的每个等价类 $[a]_R,\forall a\in U$ 称为基本集或原子集，任意有限多个基本集的并称为可定义集．空集也称为一个关于 R 的可定义集．(U,R) 中一切可定义集构成一个 σ 代数，记 $\sigma(U/R)$．实际上 $\sigma(U/R)$ 定义 U 上的一个拓扑，即 $(U,\sigma(U/R))$ 为拓扑空间．

7.1.3 定义　设 (U,R) 为近似空间，$T\subseteq U$, T 称为 R- 开集，如果

$$(\forall x\in T)(y\in U)\quad (x,y)\in R\Rightarrow y\in T.$$

显然 $[x]_R,\forall x\in U$ 为 R- 开集．U 上的所有 R- 开集加之空集构成的集合就是 σ- 代数 $\sigma(U/R)$．事实上，我们可以证明

7.1.4 练习　(1) 证明任何一个 R- 开集是 R 的等价类的并．

(2) 证明

$$\begin{aligned}(\forall x\in U)\underline{\mathrm{apr}}X &= \bigcup\{A\in\sigma(U/R)|A\subseteq X\},\\ \overline{\mathrm{apr}}X &= \bigcap\{A\in\sigma(U/R)|X\subseteq A\}\end{aligned}$$

需要注意的是在近似空间 (U,R) 上定义的上 (下) 近似算子 $\overline{\mathrm{apr}}$, $\underline{\mathrm{apr}}$ 和 R 是紧密相关的，有关论文中记为 $\overline{\mathrm{apr}}_R$, $\underline{\mathrm{apr}}_R$．本文在不致于混淆的情况下，一般不再写下标 R.

7.1.5 例　给定一玩具积木的集合 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，并假设这些积木有不同的颜色 (红、黄、蓝), 形状 (方、园、三角形) 和大小．积木的集合 U 可按颜色、形状、大小分类．记 R_1 为颜色关系，即 $(x,y)\in R_1$ 当且仅当 $x,y\in U$ 且 x 与 y 同色．类似地，记 R_2, R_3 分别表示 U 上的形状关系和大小关系且设

$$\begin{aligned}U/R_1 &= \{\{x_1,x_2,x_7\},\{x_3,x_4\},\{x_5,x_6,x_8\}\},\\ U/R_2 &= \{\{x_1,x_5\},\{x_2,x_6\},\{x_3,x_4,x_7,x_8\}\},\\ U/R_3 &= \{\{x_2,x_7,x_8\},\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}\}.\end{aligned}$$

取 $X=\{x_2,x_4,x_7\}$．则

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{apr}}_{R_1}X &= \{x_3,x_4\}, \overline{\mathrm{apr}}_{R_1}X=\{x_3,x_4\}\cup\{x_1,x_2,x_7\},\\ \underline{\mathrm{apr}}_{R_2}X &= \emptyset, \qquad \overline{\mathrm{apr}}_{R_2}X=\{x_2,x_6\}\cup\{x_3,x_4,x_7,x_8\},\\ \underline{\mathrm{apr}}_{R_3}X &= \emptyset, \qquad \overline{\mathrm{apr}}_{R_3}X=U.\end{aligned}$$

7.1.6 定义　设 (U,R) 为近似空间，$X\subseteq U$．基于 U 上的上 (下) 近似算子，U 被分为三个区域，分别称 $\underline{\mathrm{apr}}X$ 为 X 的 正域, 记为 $POS(X)$; $U-\overline{\mathrm{apr}}X$ 为 X 的 负域, 记为 $NEG(X)$; $\overline{\mathrm{apr}}X-\underline{\mathrm{apr}}X$ 为 X 的 边界, 记为 $BND(X)$.

如果 $\overline{\text{apr}}X = \underline{\text{apr}}X$, 称 X 为*可定义*的，否则 X 称为不可定义的，或称*粗糙集*(简称粗集).

7.1.7 注　(1) 在例 7.1.5 中，(U, R_1) 为近似空间，$X = \{x_2, x_4, x_7\}$ 为 (U, R_1) 的粗集；如果取 $X_1 = \{x_3, x_4\}$, 则 X_1 为 (U, R_1) 的可定义集.

(2) 如本章前言中所述，近似空间 (U, R) 可以理解为知识库 K, K 中的已知知识模块或概念即为 $\sigma(U/R)$, 也为 (U, R) 中的可定义子集全体. 这样称 (U, R) 为知识库就比较确切了. 现在有一个未知知识 $X \subseteq U$, 通过已知的知识库可以给出粗略的定位和判断. $POS(X)$ 表示根据现有知识可以判定一切属于 X 的对象全体；$NEG(X)$ 是一定不属于 X 的 U 的对象全体；$BND(X)$ 表示根据现有知识判断出可能属于 X 但不能完全肯定是否一定属于 X 的对象所组成的集合. 边界区意味着由于掌握的知识不完全而存在不能辨别的区域，X 在 (U, R) 是否为粗集关键在于 X 的边界是否为空集. 边界区越大，X 在知识库 K 中无法确切的元素就越多. 对此我们用一个量 $\eta_R(X)$ 表示. 定义

$$(\forall X \subseteq U)\ \ \eta_R(X) = \frac{\text{card}(\underline{\text{apr}}X)}{\text{card}(\overline{\text{apr}}X)},$$

$\text{card}X$ 表示 X 的基数. 称 $\eta_R(X)$ 为 X 的*近似度*. 显然，$0 \leqslant \eta_R(X) \leqslant 1$. 当 $\eta_R(X) < 1$ 时，X 是粗集；当 $\eta_R(X) = 1$ 时，X 为可定义集或称精确集. 所以我们可以通过 $\eta_R(X)$ 来定义 X 是否为粗集. 我们通过 X 还可以在 U 上定义一个新的函数 μ_X^R:

$$(\forall x \in U)\ \ \mu_X^R(x) = \frac{\text{card}(X \cap [x]_R)}{\text{card}([x]_R)}.$$

称 μ_X^R 为 X 的粗糙隶属函数，它可以解释为一种条件概率，能从全域 U 上的个体加以计算，没有任何人为的痕迹，这点和 fuzzy 集的隶属函数有本质的区别，不难看出

$$\begin{aligned}
\underline{\text{apr}}X &= \{x \in U | \mu_X^R(x) = 1\}, \\
\overline{\text{apr}}X &= \{x \in U | \mu_X^R(x) > 0\}, \\
BND(X) &= \{x \in U | 0 < \mu_X^R(x) < 1\}.
\end{aligned}$$

所以 μ_X^R 也可以充分衡量 X 在 (U, R) 是否为粗集.

我们还有两个量反映 X 在 (U, R) 中粗糙程度的. 一个为

$$\gamma(X) = \frac{\text{card}(\underline{\text{apr}}X)}{\text{card}U},$$

称为 X 的*近似质量*, 它反映了 X 中肯定在知识库中的部分现有知识的百分比. 另一个为

$$\rho(X) = 1 - \frac{|\underline{\text{apr}}X|}{|\overline{\text{apr}}X|},$$

称为 X 在 (U,R) 中粗糙性测度，它反映了知识的不完全程度.

如果我们要进一步地了解粗糙集理论的背景，还需要引入一个概念：信息系统.

7.1.8 定义 一个四元组 (U,A,V,f), 记为 S, 称为一个 *信息系统*, 这里 U 为有限对象集， A 为 U 中对象的属性集， $V=\bigcup_{a\in A}V_a$, V_a 为 U 中对象对属性 a 的取值， $f:U\times A\to V$ 成为信息函数.

一个信息系统完全可以用列表的形式呈现，而且容易理解. 例如， $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 是病人的集合. $A=\{$ 头痛、肌肉痛、体温、流感 $\}$ 为 U 中病人的体征，即属性集. $V_{头痛}=V_{肌肉痛}=V_{流感}=\{是，否\}$, $V_{体温}=\{正常，高，很高\}$. 这样我们可以列一个表如下：

	头痛	肌肉痛	体温	流感
x_1	是	是	正常	是
x_2	是	是	高	否
x_3	是	否	很高	否
x_4	是	是	正常	是

设 $B\subseteq A$, 由 B 可以确定信息系统 S 上的一个等价关系：

$$R_B=\{(x,y)\in U\times U \mid f(x,a)=f(y,a),\forall a\in B\},$$

(U,R_B) 为近似空间.

在完成以上准备之后，我们现在引入 Pawlak 粗糙代数.

7.1.9 定义 设 (U,R) 是近似空间. $(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{\mathrm{apr}},\overline{\mathrm{apr}})$ 称为 *Pawlak 粗糙代数*, 这里 $\sim$ 为 U 中的补运算.

7.1.10 注 Pawlak 粗糙代数是一个 $(2,2,1,1,1)$ 型代数, 是集代数 $(2^U,\cap,\cup,\sim)$ 的推广.

7.1.11 定理 设 $(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{\mathrm{apr}},\overline{\mathrm{apr}})$ 为 Pawlak 粗糙代数， $X,Y\subseteq U$. 则下近似算子 $\underline{\mathrm{apr}}$ 满足：

(AL1) $\underline{\mathrm{apr}}(X)=\sim\overline{\mathrm{apr}}(\sim X)$;

(AL2) $\underline{\mathrm{apr}}U=U$;

(AL3) $\underline{\mathrm{apr}}(X\cap Y)=\underline{\mathrm{apr}}(X)\cap\underline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AL4) $\underline{\mathrm{apr}}(X\cup Y)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}(X)\cup\underline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AL5) $X\subset Y\Rightarrow\underline{\mathrm{apr}}(X)\subseteq\underline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AL6) $\underline{\mathrm{apr}}(\emptyset)=\emptyset$;

(AL7) $\underline{\mathrm{apr}}(X)=X$;

(AL8) $X \subset \underline{\mathrm{apr}}(\overline{\mathrm{apr}}(X))$;

(AL9) $\underline{\mathrm{apr}}X \subseteq \underline{\mathrm{apr}}(\underline{\mathrm{apr}}(X))$;

(AL10) $\overline{\mathrm{apr}}(X) \subseteq \underline{\mathrm{apr}}(\overline{\mathrm{apr}}(X))$.

且上近似算子 $\overline{\mathrm{apr}}$ 满足:

(AU1) $\overline{\mathrm{apr}}(X) = \sim \underline{\mathrm{apr}}(\sim X)$;

(AU2) $\overline{\mathrm{apr}}\emptyset = \emptyset$;

(AU3) $\overline{\mathrm{apr}}(X \cup Y) = \overline{\mathrm{apr}}(X) \cup \overline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AU4) $\overline{\mathrm{apr}}(X \cap Y) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}(X) \cap \overline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AU5) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\mathrm{apr}}(X) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}(Y)$;

(AU6) $\overline{\mathrm{apr}}(U) = U$;

(AU7) $X \subseteq \overline{\mathrm{apr}}(X)$;

(AU8) $\overline{\mathrm{apr}}(\underline{\mathrm{apr}}(X)) \subseteq X$;

(AU9) $\overline{\mathrm{apr}}(\overline{\mathrm{apr}}(X)) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}(X)$;

(AU10) $\overline{\mathrm{apr}}(\underline{\mathrm{apr}}(X)) \subseteq \underline{\mathrm{apr}}(X)$.

证明是简单的验证，读者可为练习．由 $(AL1)$ 和 $(AU1)$ 知道 $\underline{\mathrm{apr}}$ 和 $\overline{\mathrm{apr}}$ 是一对对偶的算子，所以 $(AU_i), i = 1, 2, \cdots, 10$ 是 $(AL_i), i = 1, 2, \cdots, 10$ 的对偶性质．注意的是以上这些性质不是相互独立的．

7.1.12 练习　证明

(1) $\underline{\mathrm{apr}}\underline{\mathrm{apr}}X = \underline{\mathrm{apr}}X$;

(2) $\underline{\mathrm{apr}}\overline{\mathrm{apr}}X = \overline{\mathrm{apr}}X$;

(3) $\overline{\mathrm{apr}}\underline{\mathrm{apr}}X = \underline{\mathrm{apr}}X$.

下面我们给出 Pawlak 粗糙代数的表示定理．

7.1.13 定理　设 $(2^U, \cup, \cap, \sim, \underline{\mathrm{apr}}, \overline{\mathrm{apr}})$ 为 Pawlak 粗糙代数．则 $\sigma(U/R) = \{\overline{\mathrm{apr}}X \mid X \in 2^U\}$ 为 2^U 的子 Boolean 代数．反之，任给 $(2^U, \cup, \cap, \sim)$ 的任何子 Boolean 代数 K, 存在一个 Pawlak 粗糙代数使得 $K = \{\overline{\mathrm{apr}}X \mid X \in 2^U\}$.

证　(1) $\forall X \in \sigma(U/R)$, X 为 $R-$ 等价类的并，显然 $\overline{\mathrm{apr}}X = X$．如果 $Y \in \{\overline{\mathrm{apr}}X \mid X \in 2^U\}$. 存在 $X \in 2^U$ 使得 $Y = \overline{\mathrm{apr}}X$, $Y = \overline{\mathrm{apr}}X = \overline{\mathrm{apr}}\overline{\mathrm{apr}}X = \overline{\mathrm{apr}}Y$, 所以 Y 为 R- 等价类的并．以上证明了 $\sigma(U/R) = \{\overline{\mathrm{apr}}X \mid X \in 2^U\}$. 不难验证 $\sigma(U/R)$ 为子 Boolean 代数．

(2) 设 K 为集代数 $(2^U, \cup, \cap, \sim)$ 的子 Boolean 代数．下面定义 U 上的二元关系 R:

$$(\forall x, y \in U)\ \ (x, y) \in R \Leftrightarrow \bigcap O_x = \bigcap O_y,$$

这里 $O_x \subseteq K$, 表示 K 中包含 x 的元素全体，R 是 U 上的等价关系．由 R 可定义 Pawlak 粗糙代数 $(2^U, \cup, \cap, \sim, \underline{\mathrm{apr}}, \overline{\mathrm{apr}})$. 下面 $K = \{\overline{\mathrm{apr}}X \mid X \in 2^U\}$, 事实上，

$\forall X \in K, x \in X, y \in U$, 如果 $(x,y) \in R$, 则

$$y \in \bigcap O_y = \bigcap O_x \subseteq X.$$

因此 X 为 R 等价类之并, 即 $\overline{\text{apr}}X = X \in \{\overline{\text{apr}}X \mid X \in 2^U\}$. 另一方面, 如果 $Y \in \{\overline{\text{apr}}X \mid X \in 2^U\}$, 则 Y 为 R- 等价类之并, 而任意 $[x]_R \in K, \forall x \in U$. 因此 $Y \in K$. 证毕. □

7.1.14 练习 设 $(2^U, \cup, \cap, \sim, \underline{\text{apr}}, \overline{\text{apr}})$ 为 Pawlak 粗糙代数. 证明

(1) $\overline{\text{apr}}, \underline{\text{apr}}$ 为 2^U 上的闭包算子和内部算子;

(2) $\overline{\text{apr}}, \underline{\text{apr}}$ 在 U 上诱导相同的拓扑 $\mathcal{J}$;

(3) 拓扑空间 $(U, \mathcal{J})$ 中每个开集是闭集.

7.2 Pawlak 粗糙代数的公理化

Pawlak 粗糙代数的研究基本上我们从两个方面来深入: 一个是结构观点, 另一个是公理化的观点. 结构观点是从二元关系 R 出发来研究 Pawlak 粗糙代数的性质及一般拓展; 公理化的观点是寻求集代数 $(2^U, \cup, \cap, \sim)$ 上的公理组来保证存在 U 上的等价关系 R 使得对应于 R 的 Pawlak 粗糙代数存在.

我们首先关注一下 Pawlak 粗糙代数中等价关系 R. 设 R 是论域 U 上的二元关系, 记

$$R_S(x) = \{y \in U \mid (x,y) \in R\}.$$

则 $\forall X \subseteq U$, $\underline{\text{apr}}X = \{x \in U \mid R_S(x) \subseteq X\}$, $\overline{\text{apr}}X = \{x \in U \mid R_S(x) \cap X \neq \emptyset\}$. 当 R 为等价关系时, $\underline{\text{apr}}$ 和 $\overline{\text{apr}}$ 与 Pawlak 粗糙代数中的上 (下) 近似算子完全一致. 我们可以验证对一般的二元关系 R 所定义的上 (下) 近似算子 (AL1~AL10), (AU1~AU10) 均成立.

下面我们连续给出三个定理来刻画 U 上的一个二元关系是等价关系上 (下) 近似算子应满足什么条件.

7.2.1 定理 设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) R 是自反的;

(2) $\underline{\text{apr}}X \subseteq X, \forall X \subseteq U$;

(3) $X \subseteq \overline{\text{apr}}X, \forall X \subseteq U$.

证 由 $\underline{\text{apr}}$ 和 $\overline{\text{apr}}$ 对偶, 仅证 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Longrightarrow$ (2). $\forall x \in \overline{\text{apr}}X$, $R_S(x) \subseteq X$. 因此 $x \in R_S(x) \subseteq X$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 任取 $x \in U$, $\underline{\text{apr}}(\sim \{x\}) \subseteq \sim \{x\} \Leftrightarrow \{x\} \subseteq \overline{\text{apr}}\{x\}$. 因此 $R_S(x) \cap \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in R_S(x) \Rightarrow (x,x) \in R$. 证毕. □

7.2.2 定理 设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) R 是传递的;

(2) $\underline{\mathrm{apr}}X \subseteq \underline{\mathrm{apr}}\underline{\mathrm{apr}}X, \forall X \subseteq U$;

(3) $\overline{\mathrm{apr}}\,\overline{\mathrm{apr}}X \subseteq \overline{\mathrm{apr}}X, \forall X \subseteq U$.

证　由 $\underline{\mathrm{apr}}$ 和 $\overline{\mathrm{apr}}$ 对偶, $(2) \Leftrightarrow (3)$.

$(1) \Longrightarrow (2)$. 设 R 可传, $x \in \underline{\mathrm{apr}}X$. 则 $R_S(x) \subseteq X$. $\forall y \in R_S(x) \Rightarrow R_S(y) \subseteq R_S(x)$. 事实上, $\forall z \in R_S(y)$ 推出 $(y,z) \in R$. 又 $(x,y) \in R$ 得 $(x,z) \in R$, 从而 $z \in R_S(x)$. 由 $\underline{\mathrm{apr}}$ 的定义得 $y \in \underline{\mathrm{apr}}X \Rightarrow R_S(x) \subseteq \underline{\mathrm{apr}}X \Rightarrow \underline{\mathrm{apr}}X \subseteq \underline{\mathrm{apr}}\underline{\mathrm{apr}}X$.

$(3) \Longrightarrow (1)$. 设 $(x,y),(y,z) \in R$. 则 $y \in R_S(x), z \in R_S(y)$. $R_S(y) \cap \{z\} \neq \emptyset$ 推出 $y \in \overline{\mathrm{apr}}\{z\}$. 又 $y \in R_S(x)$, 故

$$\begin{aligned} y \in \overline{\mathrm{apr}}\{z\} \cap R_S(x) \neq \emptyset &\Rightarrow x \in \overline{\mathrm{apr}}\,\overline{\mathrm{apr}}\{z\} \\ &\Rightarrow x \in \overline{\mathrm{apr}}\{z\} \Rightarrow R_S(x) \cap \{z\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow z \in R_S(x) \Leftrightarrow (x,z) \in R. \end{aligned}$$

证毕.　□

7.2.3 定理　设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) R 是对称的;

(2) $X \subseteq \underline{\mathrm{apr}}\overline{\mathrm{apr}}X, \forall X \subseteq U$;

(3) $\overline{\mathrm{apr}}\underline{\mathrm{apr}}X \subseteq X, \forall X \subseteq U$.

证　由 $\overline{\mathrm{apr}}$, $\underline{\mathrm{apr}}$ 的对偶性, $(2) \Leftrightarrow (3)$.

$(1) \Longrightarrow (2)$. $\forall x \in X$, 如果 $R_S(x) = \emptyset$, 则 $R_S(x) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}X$, 从而 $x \in \underline{\mathrm{apr}}\overline{\mathrm{apr}}X$; 如果 $R_S(x) \neq \emptyset$, 设 $\forall y \in R_S(x)$, 由 R 的对称性得 $x \in R_S(y) \Rightarrow x \in R_S(y) \cap X \Rightarrow y \in \overline{\mathrm{apr}}X$. 由 y 的任意性得 $R_S(x) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}X \Rightarrow x \in \underline{\mathrm{apr}}\overline{\mathrm{apr}}X$.

$(2) \Longrightarrow (1)$. 设 $(x,y) \in R \Rightarrow y \in R_S(x)$. 由 (2), 取 $X = \{x\}$, 则 $R_S(x) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}\{x\}$. 从而 $y \in \overline{\mathrm{apr}}\{x\} \Leftrightarrow R_S(y) \cap \{x\} \neq \emptyset$. 故 $x \in R_S(y) \Leftrightarrow (y,x) \in R$. 证毕.　□

为了进一步认清在 Pawlak 粗糙代数中, 定理 7.1.11 中的性质分别和二元关系 R 什么样的特征有关, 我们在这里设计以下练习.

7.2.4 练习　设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) $(\forall x \in U)\ R_S(x) \neq \emptyset$;

(2) $\underline{\mathrm{apr}}X \subseteq \overline{\mathrm{apr}}X, \forall X \subseteq U$;

(3) $\underline{\mathrm{apr}}\emptyset = \emptyset$;

(4) $\overline{\mathrm{apr}}U = U$.

7.2.5 练习　设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) $\bigcup_{x \in U} R_S(x) = U$;

(2) $(\forall x \in U)\ \overline{\mathrm{apr}}\{x\} \neq \emptyset$.

7.2.6 练习　设 R 为 U 上的二元关系. 则以下各款等价:

(1) $(\forall x, y, z \in U)\ \ (y \in R_S(x)) \wedge (z \in R_S(x)) \Rightarrow z \in R_S(y)$;

(2) $(\forall x, y \in U)\ \ y \in R_S(x) \Rightarrow R_S(x) \subseteq R_S(y)$;

(3) $\overline{\text{apr}}X \subseteq \underline{\text{apr}}\overline{\text{apr}}X, \forall X \subseteq U$;

(4) $\overline{\text{apr}}\underline{\text{apr}}X \subseteq \underline{\text{apr}}X, \forall X \subseteq U$.

下面我们将不从 U 上的二元关系 R 出发来定义粗糙集. 设 $(2^U, \cap, \cup, \sim)$ 为集代数, L, H 为 2^U 上的两个一元算子.

7.2.7 定义　设 L, H 为 2^U 上的两个一元算子. 称 L, H 是**对偶**的, 如果它们满足:

(L0) $(\forall X \subseteq U)\ LX = \sim H(\sim X)$;

(H0) $(\forall X \subseteq U)\ HX = \sim L(\sim X)$.

2^U 上的算子对一般情况下都不是对偶的, 这方面的研究也有很多. 基于 Pawlak 粗糙代数中的上 (下) 近似算子 $\overline{\text{apr}}, \underline{\text{apr}}$ 是对偶的, 所以本章只讨论对偶算子. 既然 L, H 是对偶的, 那么通过一个算子, 譬如 L, 可以定义另一个算子 H. 因为 $(\forall X \subseteq U)\ HX = \sim L \sim X$, 故 $H = \sim L \sim$, 其中 $\sim$ 也为 2^U 上的一元算子 —— 补算子.

7.2.8 注　对于对偶的算子 L, H 及一元补算子 $\sim$ 之间的合成运算, 我们有以下规则:

(1) $\sim H = L \sim$;

(2) $\sim L = H \sim$;

(3) L 和 H 的任意一个合成列等于该列中将 L 换成 H, H 换成 L 且在该列前后各加一个 $\sim$ 运算. 例如: $LHHLH = \sim HLLHL \sim$.

对于粗糙集的公理化表示, 下面的定义是重要的.

7.2.9 定理 (Yao 定理)　设 $L, H: 2^U \to 2^U$ 为 2^U 上的对偶一元算子. 则存在 U 上的二元关系 R 使得对任意 $X \subseteq U$, $LX = \underline{\text{apr}}_R X$, $HX = \overline{\text{apr}}_R X$ 当且仅当 L 和 H 满足:

(L1) $LU = U$;

(L2) $L(X \cap Y) = LX \cap LY$;

(H1) $H\emptyset = \emptyset$;

(H2) $H(X \cup Y) = HX \cup HY$.

证　由定理 7.1.11, 必要性是显然的.

充分性. 由 H, 定义 U 上的二元关系 R 如下:

$$(\forall x, y \in U)\ \ (x, y) \in R \Leftrightarrow x \in H(\{y\}).$$

则 $\forall X \subset U$, 不妨设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ ($X = \emptyset$ 时, 由 (H1) 得 $\overline{\mathrm{apr}}_R\emptyset = \emptyset$),

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathrm{apr}}_R X &\Rightarrow R_S(x) \cap X \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (\exists x_i \in X)\ x \in H(\{x_i\}) \Leftrightarrow (x, x_i) \in R \\ &\Rightarrow x_i \in H(\{x_i\}) \subseteq HX \ \ (\text{由 (H2)}). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} x \in HX &\Rightarrow x \in H(\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}) = H(\{x_1\}) \cup \cdots \cup H(\{x_m\}) \\ &\Rightarrow (\exists x_i \in X)\ x \in H(\{x_i\}) \Leftrightarrow (x, x_i) \in R \\ &\Rightarrow x_i \in R_S(x) \cap X \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{apr}}_R X. \end{aligned}$$

因此 $\overline{\mathrm{apr}}_R = H$. 由 L 和 H 的对偶性得 $L = \underline{\mathrm{apr}}_R$. 证毕. □

7.2.10 注　在定理 7.2.9 中, 为了完备起见我们将 (L1), (L2), (H1) 和 (H2) 全部写出. 事实上, 由 L 和 H 的对偶性, 我们只需要任意写出其中的一组 (H1), (H2) 或 (L1), (L2) 即可.

值得注意的是 (L1), (L2) 或 (H1), (H2) 是相互独立的公理组, 可以认为是粗糙集理论中最基本的公理组.

7.2.11 练习　证明 (L1) 与 (L2) 是独立的.

7.2.12 定义　设 $L, H: 2^U \to 2^U$ 的对偶一元算子. 如果 L 满足 (L1), (L2) 或等价地, H 满足 (H1), (H2). 系统 $(2^U, \cap, \cup, \sim, L, H)$ 称为*粗糙集代数*, L, H 称为*近似算子*.

粗糙集代数系统可以说是满足对偶的一类较弱的代数系统, 可以通过给 L, H 添加新的公理制约可以得到一系列更合乎显示的粗糙代数系统. 例如, 我们给出如下的公理组: 对 $\forall X, Y \subseteq U$,

(K) $L(\sim X \cup Y) \subseteq \sim LX \cup LY$.

(K′) $\sim Hx \cap HY \subseteq H(\sim X \cap Y)$.

(S) $HX = \bigcup_{x \in X} H\{x\}$.

(L3) $L(X \cup Y) \supseteq LX \cup LY$.

(H3) $H(X \cap Y) \subseteq HX \cap HY$.

(L4) $X \subseteq Y \Rightarrow LX \subseteq LY$.

(H4) $X \subseteq Y \Rightarrow HX \subseteq HY$.

(L5) $L(X \cap Y) \subseteq LX \cap LY$.

(H5) $H(X \cup Y) \supseteq HX \cup HY$.

(D) $LX \subseteq HX$.

(T) $LX \subseteq X$.

(T′) $X \subseteq HX$.

(B) $X \subseteq LHX$.

(B′) $HLX \subseteq X$.

(4) $LX \subseteq LLX$.

(4′) $HHX \subseteq HX$.

(5) $HX \subseteq LHX$.

(5′) $HLX \subseteq LX$.

7.2.13 练习　证明下列蕴涵和等价成立:

(a) (L1), (L2)⇔(L1), (K);
　　(H1), (H2)⇔ (H1), (K′);

(b) (L2)⇒(L3), (L4), (L5);
　　(H2)⇒(H3), (H4), (H5);

(c) (L3)⇔ (L4)⇔(L5);
　　(H3)⇔ (H4)⇔(H5);

(d) (H2)⇔ (5).

根据定理 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3 及定理 7.2.9, 我们得出本节的主要结果.

7.2.14 定理 (Pawlak 粗糙集代数的公理化表示定理)　设 L, H 为 2^U 上的两个对偶的一元算子. $(2^U, \cap, \cup, \sim, L, H)$ 为 Pawlak 粗糙代数, 即存在 U 上的等价关系 R 使得 $L = \underline{\mathrm{apr}}_R$, $H = \overline{\mathrm{apr}}_R$ 当且仅当 L 满足 (L1), (L2), (T), (B) 和 (4) 或 H 满足 (H1), (H2), (T′), (B′) 和 (4′).

7.2.15 定理　设 L, H 为 2^U 上的两个对偶一元算子. 则公理组 (L1), (L2), (T), (B) 和 (4) 等价于 (L1), (L2), (T) 及

(L6) $LX = LLX, \forall X \subseteq U$;

(L7) $\sim LX = L(\sim LX), \forall X \subseteq U$.

证　因为 (L6)⇒(4), 且由 (L7) 得, $LX = HLX \Rightarrow HX = LHX$. 又由 (T)⇔(T′) 得 $X \subseteq LHX$, 即 (B) 成立. 因此 (L1), (L2), (T), (L6), (L7)⇒(L1), (L2), (T), (4), (B).

反之, 由 (T) 及 (4) 和 (L2) 得, $LLX \subseteq LX \subseteq LLX$, 从而 $LX = LLX$, 即 (L6) 成立. 因由 (B), $X \subseteq LHX \Rightarrow HLX \subseteq X$. 又由 (4), $LX \subseteq LLX$ 得 $HLX \subseteq HL(LX) \subseteq LX$. 显然由 (T′) $LX \subseteq HLX$, 故 $LX = HLX \Leftrightarrow \sim LX = L(\sim LX)$, 即 (L7) 成立. 这样完成了 (L1), (L2), (T), (4), (B)⇒(L1), (L2), (T), (L6), (L7) 的证明. 证毕. □

7.2.16 练习　设 $(2^U, \cap, \cup, \sim, L, H)$ 为粗糙集代数系统, 证明 $(2^U, \cap, \cup, \sim, LL, HH)$ 也为粗糙集代数系统.

7.3 Fuzzy 粗糙集与粗糙 Fuzzy 集

Fuzzy 集和粗糙集都是为了处理模糊不清、不确定的概念而对经典集合论的推广. 这两个理论涉及的基本问题既有联系又有区别. 尽管有一些研究者认为一种理论也许比另一种理论更一般, 但一般地, 认为这两种理论有区别又相互补充, 这是一种普遍较能接受的说法. 粗糙集关注的是对象间的不可分辨 (indiscernibility) 性, 不可分辨的传统刻画是对象集上的等价关系. 粗糙集是通常等价关系之等价类表现出的近似集对, 是 U 的普通子集对. Fuzzy 集理论是通过一个集的特征函数的一般化来描述集合边界的病态定义 (ill-definition). Fuzzy 集可以被看作没有明确和清晰边界的类, 而粗糙集是普通集类的粗糙描述.

本章第一节我们论及 Pawlak 粗糙代数中提到粗糙隶属函数 μ_X^R, 这是一个 Fuzzy 集且

$$\mathrm{core}(\mu_X^R) = \{x \in U \mid \mu_X^R(x) = 1\} = \underline{\mathrm{apr}}_R X,$$
$$\mathrm{supp}(\mu_X^R) = \{x \in U \mid \mu_X^R(x) > 0\} = \overline{\mathrm{apr}}_R X.$$

该 Fuzzy 集依赖于 X 和 R, 对象 $x \in U$ 的取值没有任何主观因素, 而且通过 X 及 R 精确计算出, 即可以从已有的知识库 (数据库) 中得到, 这和一般的 Fuzzy 集 μ 的取值 $\mu(x)$ 仅和 x 相关, 而和 x 以外的其他对象不相关是有很大区别的. 基于 Fuzzy 集和粗糙集的区别和互补性, 本节主要讨论的相互渗透而产生的 Fuzzy 粗糙集和粗糙 Fuzzy 集.

设 (U, R) 为知识库, X 为 U 的子集合. 则 Pawlak 粗糙集代数的基本思想是用已知的知识最大限度精确地去描述 X, 即用 $(\underline{\mathrm{apr}}X, \overline{\mathrm{apr}}X)$ 对来近似表达. 在现实生活中 X 不一定是 U 的普通子集, 而是一个 Fuzzy 集, 我们怎样用已知的知识来近似描述呢? 这就产生了 Fuzzy 粗糙集 (Fuzzy rough set) 模型.

7.3.1 定义 设 (U, R) 是近似空间, R 为 U 上的等价关系, μ 为 U 上的 Fuzzy 集. 则 μ 在 U 上的上 (下) 近似分别定义为 $U/R = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 上的 Fuzzy 集 $\underline{\mathrm{apr}}\mu$, $\overline{\mathrm{apr}}\mu$:

$$\underline{\mathrm{apr}}\mu(X_i) = \inf_{x \in X_i} \mu(x),$$
$$\overline{\mathrm{apr}}\mu(X_i) = \sup_{x \in X_i} \mu(x), i = 1, 2, \cdots, n.$$

如果 $\underline{\mathrm{apr}}\mu = \overline{\mathrm{apr}}\mu$, 称 μ 为可定义的, 否则称 μ 为粗糙 Fuzzy 集.

7.3.2 注 1) $\underline{\mathrm{apr}}\mu$ 和 $\overline{\mathrm{apr}}\mu$ 显然可以拓展为 U 上的 Fuzzy 集, 即 $\underline{\mathrm{apr}}\mu(x) = \underline{\mathrm{apr}}\mu(X_i)$, $x \in X_i$, $\overline{\mathrm{apr}}\mu(x) = \overline{\mathrm{apr}}\mu(X_i)$, $x \in X_i$. 如果没有特别说明, 一般不再加以区别.

2) 当 μ 为 U 的普通子集时, $\forall x \in U, \exists X_i \in U/R$ 使得 $x \in X_i$. 设 $X \subseteq U$, μ 为 X 的特征函数 f_X. 则

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{apr}} f_X(x) &= \begin{cases} 1, & (\exists X_i)\ x \in X_i \subseteq X; \\ 0, & \quad x \in X_i \not\subseteq X. \end{cases} \\
&= f_{\underline{\mathrm{apr}}X}(x),
\end{aligned}
$$

即 X 的特征函数的下近似恰好为 X 的下近似的特征函数. 同理可以证明 X 的特征函数的上近似为 X 的上近似的特征函数. 故 Fuzzy 集的上 (下) 近似是一般 Pawlak 粗糙集代数的推广.

7.3.3 定理　设 (U, R) 为近似空间, $\mu, \nu \in F(U)$.

(1) $\underline{\mathrm{apr}}\mu \leqslant \mu \leqslant \overline{\mathrm{apr}}\mu$.

(2) $\overline{\mathrm{apr}}(\mu \cup \nu) = \overline{\mathrm{apr}}\mu \cup \overline{\mathrm{apr}}\nu$;

$\underline{\mathrm{apr}}(\mu \cap \nu) = \underline{\mathrm{apr}}\mu \cup \overline{\mathrm{apr}}\nu$.

(3) $\underline{\mathrm{apr}}\mu \cup \underline{\mathrm{apr}}\nu \subseteq \underline{\mathrm{apr}}(\mu \cup \nu)$;

$\overline{\mathrm{apr}}(\mu \cap \nu) \subseteq \overline{\mathrm{apr}}\mu \cap \overline{\mathrm{apr}}\nu$.

(4) $\overline{\mathrm{apr}}(1 - \mu) = 1 - \underline{\mathrm{apr}}\mu$;

$\underline{\mathrm{apr}}(1 - \mu) = 1 - \overline{\mathrm{apr}}\mu$.

(5) $\underline{\mathrm{apr}}\,\overline{\mathrm{apr}}\mu = \overline{\mathrm{apr}}\mu$;

$\underline{\mathrm{apr}}\,\underline{\mathrm{apr}}\mu = \underline{\mathrm{apr}}\mu$.

(6) $\overline{\mathrm{apr}}\,\underline{\mathrm{apr}}\mu = \underline{\mathrm{apr}}\mu$;

$\underline{\mathrm{apr}}\,\overline{\mathrm{apr}}\mu = \underline{\mathrm{apr}}\mu$.

证　只证明 (2) 的前一部分, 其余的部分读者自己练习.

$$
\begin{aligned}
(\forall X_i \in U/R)\ \ \overline{\mathrm{apr}}(\mu \cup \nu)(X_i) &= \sup_{x \in X_i} (\mu \cup \nu)(x) \\
&= \sup_{x \in X_i} (\mu(x) \vee \nu(x)) \\
&= \sup_{x \in X_i} \mu(x) \vee \sup_{x \in X_i} \nu(x) \\
&= \overline{\mathrm{apr}}\mu(X_i) \vee \overline{\mathrm{apr}}\nu(X_i) \\
&= (\overline{\mathrm{apr}}\mu \cup \overline{\mathrm{apr}}\nu)(X_i).
\end{aligned}
$$

故 $\overline{\mathrm{apr}}(\mu \cup \nu) = \overline{\mathrm{apr}}\mu \cup \overline{\mathrm{apr}}\nu$. 证毕. □

在讨论粗糙 Fuzzy 集之前, 我们先将定理 1.1.10, 即 Fuzzy 集的分解定理再进行深入的讨论.

7.3.4 定理 (分解定理 II)　设 $\mu \in F(X)$, Q 是 $[0, 1]$ 内的所有有理数集合. 则

$$
\mu = \bigcup_{\lambda \in Q} \lambda \mu_{\lambda}^{>} = \bigcup_{\lambda \in Q} \lambda \mu_{\lambda},
$$

其中 $\lambda\mu_\lambda(x)=\lambda\wedge(\mu_\lambda)_\lambda(x)$, $\lambda\mu_\lambda^{>}(x)=\lambda\wedge(\mu_\lambda^{>})_\lambda(x),\forall x\in X$.

证 对任意 $x\in X$,

$$\begin{aligned}\mu(x)&=\sup_{\lambda\in Q}\{\lambda\mid\lambda<\mu(x)\}\\&=\sup_{\lambda\in Q}\{\lambda\wedge(\mu_\lambda^{>})_\lambda(x)\}=\sup_{\lambda\in Q}(\lambda\mu_\lambda^{>})(x)\\&=\Big(\bigcup_{\lambda\in Q}\lambda\mu_\lambda^{>}\Big)(x).\end{aligned}$$

因此 $\mu=\bigcup_{\lambda\in Q}\lambda\mu_\lambda^{>}$. 类似地可以证明 $\mu=\bigcup_{\lambda\in Q}\lambda\mu_\lambda$. 证毕. □

通过定理 7.3.4 的证明, 我们不难得出如下推论.

7.3.5 推论 设 $\mu\in F(X)$, $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 是 $[0,1]$ 内的一个序列且满足:

(1) $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

则 $\mu(\alpha)=(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu_{\alpha_i})(\alpha)$.

7.3.6 定义 设 $H:[0,1]\to 2^X$ 为集值映射且满足: $\lambda_1\leqslant\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\subseteq H(\lambda_2)$. 称 H 为 X 上的**集合套**. X 上的全体集合套记为 $H(X)$.

不难看出, 设 $\mu\in F(X)$. 则映射

$$H:[0,1]\to 2^X\mid\lambda\to\mu_\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$$

是一个集合套. 同理可得

$$H_1:[0,1]\to 2^X\mid\lambda\to\mu_\lambda^{>},\forall\lambda\in[0,1]$$

也为 X 上的集合套.

7.3.7 定理 (分解定理 III) 设 $\mu\in F(X)$, $H:[0,1]\to 2^X$ 为集值映射且满足 $\mu_\lambda^{>}\subseteq H(\lambda)\subseteq\mu_\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$. 则

(1) H 为 X 上的集合套;

(2) $\mu=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$;

(3) $\mu_\alpha=\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)$, $\mu_\alpha^{>}=\bigcup\limits_{\lambda>\alpha}H(\lambda),\forall\lambda\in[0,1)$.

证 (1) 设 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$. 则当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时, $H(\lambda_1)=H(\lambda_2)$. 当 $\lambda_1<\lambda_2$ 时, 则

$$H(\lambda_2)\subseteq\mu_{\lambda_2}\subseteq\mu_{\lambda_1}^{>}\subseteq H(\lambda_1).$$

(2) 由假设及定理 1.1.10,

$$\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\mu_\lambda^{>}\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\mu_\lambda=\mu.$$

这里 $(\lambda H(\lambda))(x) = \lambda \wedge H(\lambda)_\lambda(x)$, 即 $x \in H(\lambda)$, $(\lambda H(\lambda))(x) = \lambda$. 当 $x \notin H(\lambda)$, $(\lambda H(\lambda))(x) = 0$.

(3) 设 $\lambda < \alpha$, 则 $\mu_\lambda \supset \mu_\alpha$, 因此 $\mu_\alpha \subset \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\lambda$. 又设 $x \in \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\lambda$, 任意 $\lambda_1 < \alpha$ 均有 $x \in \mu_{\alpha.} \Rightarrow \mu(x) \geqslant \lambda_1$, 因此 $\mu(x) \geqslant \sup_{\lambda_1<\alpha} \lambda_1 = \alpha$, 即 $x \in \mu_\alpha$. 以上证明了 $\mu_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\lambda$. 由假设

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) \supseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\lambda^{>} \supseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\alpha = \mu_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\lambda \supseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda).$$

故 $\mu_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda)$. 同理可证 $\mu_\alpha^{>} = \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda)$. 证毕. □

我们知道给定 X 的一个子集簇 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$, 一般不能保证一定存在 $\mu \in F(X)$ 使得 $\mu_\alpha = A_\alpha, \forall\alpha \in [0,1]$. 下面定理回答了这个问题且在我们以后的讨论中是非常有用的.

7.3.8 定理 (Negoita, Ralesu 表现定理)　设 $(A_\alpha)_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ 是 X 上的子集簇, 存在一个 Fuzzy 集 μ 使得 $\mu_\alpha = A_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ 当且仅当

(1) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$;

(2) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n} = A_\alpha$.

证　必要性. 如果存在 $\mu \in F(X)$ 使得 $\mu_\alpha = A_\alpha, \forall\alpha \in [0,1]$. 则由推论 7.3.5 和定理 7.3.7,

$$\mu_\alpha = A_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} \mu_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} A_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}.$$

充分性. 由假设 (1) 得 $\{A_\alpha\}_\alpha, \alpha \in [0,1]$ 是集合套, 令 $\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda A_\alpha$, 则 $\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda A_\alpha$ 是 Fuzzy 集且

$$\begin{aligned}
(\forall\lambda \in [0,1])\ \ x \in \mu_\lambda^{>} &\Leftrightarrow \mu(x) > \lambda \\
&\Rightarrow \Big(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha\Big)(x) > \lambda \\
&\Rightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge (A_\alpha)_\alpha(x)) > \lambda \\
&\Rightarrow (\exists\alpha_0 \in [0,1])\ \alpha_0 \wedge (A_{\alpha_0})_{\alpha_0}(x) > \lambda \\
&\Rightarrow \alpha_0 > \lambda, (A_{\alpha_0})_{\alpha_0}(x)) = \alpha_0 \\
&\Rightarrow \alpha_0 > \lambda, x \in A_{\alpha_0} \subseteq A_\lambda, \lambda \neq 1.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} x \in A_\lambda &\Rightarrow (A_\lambda)_\lambda(x) = \lambda \\ &\Rightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge (A_\alpha)_\alpha(x)) \geqslant \lambda \wedge (A_\lambda)_\lambda(x) = \lambda \\ &\Rightarrow \mu(x) \geqslant \lambda \Rightarrow x \in \mu_\lambda. \end{aligned}$$

因此 $\mu_\lambda^{>} \subseteq A_\lambda \subseteq \mu_\lambda$, $\forall\lambda \in [0,1)$. 由定理 7.3.7, $\mu_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda<\alpha} A_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n} = A_\alpha$, $\forall\alpha \in [0,1]$. 证毕. □

7.3.9 练习 *设 $\Psi : [0,1] \to [0,1]$ 是给定函数, $(A_\alpha)_\alpha, \alpha \in [0,1]$ 为 X 的子集簇, 则存在一个 Fuzzy 集使得 $\mu_{\phi(\alpha)} = A_\alpha, \alpha \in [0,1]$ 当且仅当*

(1) $\phi(\alpha_1) \leqslant \phi(\alpha_2) \Rightarrow A_{\phi(\alpha_1)} \supseteq A_{\phi(\alpha_2)}$;

(2) $\phi(\alpha_1) \leqslant \phi(\alpha_2) \leqslant \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(\alpha_n) = \phi(\alpha) \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n} = A_\alpha$.

有了以上准备之后, 我们以下讨论 Fuzzy 粗糙集. 设 (U,μ) 为 Fuzzy 近似空间, 其中 $\mu \in F(U \times U)$ 为 U 上的 Fuzzy 等价关系 (也有称之为 Fuzzy 相似关系), 即 $\mu_\alpha, \alpha \in [0,1]$ 为 U 上的等价关系. 所以 μ 也可表为 $(\mu_\alpha)_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, 由此我们可以得到一个近似空间簇 $(U,\mu_\alpha)_\alpha$,$\alpha \in [0,1]$. 任取 $A \subseteq U$, 关于 Fuzzy 近似空间 (U,μ), 我们获得粗糙集簇

$$(\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A), \overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A))_\alpha, \alpha \in [0,1].$$

我们现考虑下近似簇 $(\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A))_\alpha, \alpha \in [0,1]$. 如果 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, 则 $\mu_{\alpha_2} \subseteq \mu_{\alpha_1}$, 即 μ_{α_2} 为 μ_{α_1} 的加细. 因此 $\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_1}}(A) \subseteq \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_2}}(A)$. 令 $\Psi : [0,1] \to [0,1] \mid \alpha \to 1-\alpha$, 则 $\Psi(\alpha_1) \leqslant \Psi(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_2 \leqslant \alpha_1 \Rightarrow \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_2}}(A) \subseteq \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_1}}(A)$. 因此练习 7.3.9 中 (1) 成立. 又设 $\Psi(\alpha_1) \leqslant \Psi(\alpha_2) \leqslant \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi(\alpha_n) = \beta = \Psi(\alpha)$. 由 μ 为 Fuzzy 等价关系及定理 7.3.8, $\mu_{\Psi(\alpha)} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{\Psi(\alpha_n)}$. 由 Ψ 的定义得 $\Psi(\alpha_i) = 1-\alpha_i$, $i = 1,2,\cdots$. 因此 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. 由 $\alpha \leqslant \alpha_i$, $i = 1,2,\cdots$, 得 $\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A) \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A)$. 反之, 设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A)$, 则

$$\begin{aligned} [x]_{\mu_{\alpha_n}} \subseteq A, \forall n \in Z^+ &\Rightarrow [x]_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{\alpha_n}} \subseteq A \\ &\Leftrightarrow [x]_{\mu_\alpha} \subseteq A \Rightarrow x \in \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A). \end{aligned}$$

因此 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A) = \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)$, $A \subseteq U$. 这证明了练习 7.3.9 中 (2) 成立. 因此存在 Fuzzy 集 $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$ 使得 $(\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_{\Psi(\alpha)} = \underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)$.

类似地，对于近似簇 $\{\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)\}_\alpha, \alpha\in[0,1]$. 如果 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，则 $\mu_{\alpha_2}\subsetneq\mu_{\alpha_1}$，因此 $\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_1}}(A)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_2}}(A)$. 假设 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. 由于 μ 为 Fuzzy 等价关系，从而 $\mu_\alpha=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{\alpha_n}$. 不难看出

$$\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A),\forall A\subseteq U.$$

另一方面，设 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A)$，则 $[x]_{\mu_{\alpha_n}}\cap A\neq\emptyset, n=1,2,\cdots$. 因为 U 为有限集，所以存在 $n\in Z^+$ 使得 $\mu_{\alpha_n}=\mu_{\alpha_{n+1}}=\cdots$. 因此，$\mu_\alpha=\mu_n$，从而 $[x]_{\mu_n}\cap A\neq\emptyset$，即 $x\in\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)$. 以上证明了 $\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_{\alpha_n}}(A)$. 根据定理 7.3.8, 存在一个 Fuzzy 集 $\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$ 使得 $(\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_\alpha=\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)$, $\alpha\in[0,1)$.

下面我们试图给出 $\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$ 及 $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$ 这两个 Fuzzy 集的特征函数.

我们知道，如果 μ 为 Fuzzy 集，则

$$(\forall x\in)\ \ \mu(x)=\sup\{\alpha\mid x\in\mu_\alpha\}=\sup\{\alpha\mid x\in\mu_\alpha^{>}\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mu_{\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)}(x)&=\sup\{\Psi(\alpha)\mid x\in(\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_{\Psi(\alpha)}\}\\&=\sup\{1-\alpha\mid x\in\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)\}\\&=\sup\{1-\alpha\mid[x]_{\mu_\alpha}\subseteq A\}\\&=\sup\{1-\alpha\mid(\forall y\in U)\ \mu(x,y)\geqslant\alpha\Rightarrow y\in A\}\\&=\sup\{1-\alpha\mid(\forall y\in U)\ y\notin A\Rightarrow\mu(x,y)\leqslant\alpha\}\\&=\inf\{1-\mu(x,y)\mid y\notin A\}\\&=\inf\{\max[f_A(y),1-\mu(x,y)]\mid y\in U\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)}(x)&=\sup\{\alpha\mid x\in(\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_\alpha\}\\&=\sup\{\alpha\mid x\in\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\alpha}(A)\}\\&=\sup\{\alpha\mid[x]_{\mu_\alpha}\cap A\neq\emptyset\}\\&=\sup\{\alpha\mid(\exists y\in U)\ \mu(x,y)\geqslant\alpha,y\in A\}\\&=\sup\{\mu(x,y)\mid y\in A\}\\&=\sup\{\min[f_A(y),\mu(x,y)]\mid y\in U\}.\end{aligned}$$

综上所述，给定一个 Fuzzy 近似空间 (U,μ) 及 U 的子集 A, $(\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A),\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))$ 称为关于 A 的 Fuzzy 粗糙集，A 为普通子集，下近似 $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$ 和上近似 $\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$

均为 U 上的 Fuzzy 集且

$$(\forall x\in U)\ \mu_{\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)}(x)=\inf\{1-\mu(x,y)\mid y\notin A\},$$
$$\mu_{\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)}(x)=\sup\{\mu(x,y)\mid y\in A\}.$$

Fuzzy 粗糙集 $(\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A),\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))$ 关于 β 的水平截集

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A),\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_\beta&=(\underline{\mathrm{apr}}_{\mu_\beta}(A),\overline{\mathrm{apr}}_{\mu_\beta}(A))\\&=((\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_{1-\beta},(\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A))_\beta).\end{aligned}$$

它恰是近似空间 $\mathrm{apr}\mu_\beta=(U,\mu_\beta)$ 中的粗糙集.

7.3.10 注 设 R 为 U 上的等价关系, $A\subseteq U$, f_R 和 f_A 为 R 和 A 的特征函数, 则

$$\begin{aligned}f_{\underline{\mathrm{apr}}_R(A)}(x)&=\inf\{f_A(y)\mid y\in U,(x,y)\in R\}\\&=\inf\{1-f_R(x,y)\mid y\notin A\}\\&=\begin{cases}1, & x\in\underline{\mathrm{apr}}_R(A);\\0, & x\notin\underline{\mathrm{apr}}_R(A).\end{cases}\end{aligned}$$

类似地可以看出,

$$\begin{aligned}f_{\overline{\mathrm{apr}}_R(A)}(x)&=\sup\{f_A(y)\mid y\in U,(x,y)\in R\}\\&=\sup\{f_R(x,y)\mid y\in A\}.\end{aligned}$$

所以 Fuzzy 粗糙集是普通粗糙集的推广. 基于粗糙集理论, 我们有

7.3.11 练习 设 $A,B\subseteq U$, $\mu\in F(U\times U)$ 为 U 上的 Fuzzy 等价关系. 则

(1) $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(\sim A)=\sim\overline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$,
$\overline{\mathrm{apr}}_\mu(\sim A)=\sim\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)$;

(2) $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(U)=U$,
$\overline{\mathrm{apr}}_\mu\emptyset=\emptyset$;

(3) $\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A\cap B)=\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)\cap\underline{\mathrm{apr}}_\mu(B)$,
$\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A\cup B)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_\mu(A)\cup\underline{\mathrm{apr}}_\mu(B)$.

7.3.12 注 我们在讨论粗糙 Fuzzy 集的时候没有用讨论 Fuzzy 粗糙集相似的方法. 事实上, 这两类粗糙集模型我们完全可以用相同的方法处理. 简单地说, 设 (U,R) 为近似空间, $\mu\in F(U)$. 则 $(\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu_\alpha),\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu_\alpha))_\alpha$, $\alpha\in[0,1]$ 是一关于 α 的粗糙集簇且 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\Rightarrow\mu_{\alpha_1}\supseteq\mu_{\alpha_2}\Rightarrow\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu_{\alpha_1})\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu_{\alpha_2})$, $\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu_{\alpha_1})\supseteq\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu_{\alpha_2})$. 由定理 7.3.8, 存在 Fuzzy 集对 $(\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu),\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu))$ 使得 $(\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu))_\alpha=\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu_\alpha)$,

$(\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu))_\alpha = \overline{\mathrm{apr}}_R(\mu_\alpha)$. 且

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu)}(x) &= \sup\{\alpha \mid x \in (\underline{\mathrm{apr}}_R(\mu))(A))_\alpha\} \\
&= \sup\{\alpha \mid \underline{\mathrm{apr}}_R(\mu_\alpha)\} \\
&= \sup\{\alpha \mid [x]_R \subseteq \mu_\alpha\} \\
&= \inf\{\mu(y) \mid y \in [x]_R\} \\
&= \inf\{\mu(y) \mid (x,y) \in R\} \\
&= \inf\{\max\{\mu(y), 1 - f_R(x,y) \mid y \in U\}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{\overline{\mathrm{apr}}_R(\mu)}(x) &= \sup\{\alpha \mid [x]_R \cap \mu_\alpha \neq \emptyset\} \\
&= \sup\{\mu(y) \mid (x,y) \in R\} \\
&= \sup\{\min\{\mu(y), f_R(x,y)\}\}.
\end{aligned}
$$

7.4 粗糙半群

从代数的观点，拓扑的观点来讨论和研究粗糙集是粗糙集理论研究的主导思想之一. 1994 年, Biswas 和 Nanda 引入粗糙群和粗糙子群的概念，将粗糙集研究思想引入到群论学科. 1997 年, Kuroki 进一步研究了半群的粗糙理想. 国内近年来也有一些学者在从事粗糙半群的更深入的探讨. 本节可以为进一步从事这方面研究的学者提供一些基本知识和方法.

设 S 为半群, ρ 为 S 上的同余. ρ 称为完备的, 如果 $(\forall a, b \in S)$ $[a]_\rho[b]_\rho = [ab]_\rho$. 我们应该注意的是一般同余 ρ, 我们仅有 $[a]_\rho[b]_\rho \subseteq [ab]_\rho$. 设 $A \subseteq S$, 为了方便起见, 以后我们也用 $\rho^-(A)$ 表示 $\overline{\mathrm{apr}}_\rho(A)$, $\rho_-(A)$ 表示 $\underline{\mathrm{apr}}_\rho(A)$.

7.4.1 定理　设 ρ 和 λ 为半群 S 上的同余, A, B 为 S 的非空子集. 则下列各款成立:

(1) $\rho_-(A) \subseteq A \subseteq \rho^-(A)$;

(2) $\rho^-(A \cup B) = \rho^-(A) \cup \rho^-(B)$;

(3) $\rho_-(A \cap B) = \rho_-(A) \cap \rho_-(B)$;

(4) $A \subseteq B \Rightarrow \rho_-(A) \subseteq \rho_-(B), \rho^-(A) \subseteq \rho^-(B)$;

(5) $\rho_-(A \cup B) \subseteq \rho_-(A) \cup \rho_-(B)$;

(6) $\rho^-(A \cap B) = \rho^-(A) \cap \rho^-(B)$;

(7) $\rho \subseteq \lambda \Rightarrow \rho_-(A) \supseteq \lambda_-(B), \rho^-(A) \subseteq \lambda^-(B)$;

(8) $\rho^-(A)\rho^-(B) \subseteq \rho^-(AB)$;

(9) $(\rho \cap \lambda)^-(A) \subseteq \rho^-(A) \cap \lambda^-(A)$.

以上结论的证明均为简单的验证, 留给读者练习. 如果 ρ 为 S 的完备同余, 则

(10) $\rho_-(A)\rho_-(B) \subseteq \rho_-(AB)$.

也成立.

7.4.2 定义　设 S 为半群，ρ 为 S 上的同余且 $A \subseteq S$. 如果 $\rho^-(A)$ 为 S 的子半群，称 A 为 S 的 *上粗子半群*, 同理可定义上粗左 (右) 理想、双理想等.

7.4.3 定理　设 S 为半群，ρ 为 S 上的同余. 则下列各款成立:

(1) 设 A 为 S 的子半群，则 $\rho^-(A)$ 也是;

(2) 设 A 为 S 的左 (右) 双理想，则 $\rho^-(A)$ 也是 S 的左 (右) 双理想.

证　(1) 因为 $A^2 \subseteq A$, 由定理 7.4.1 的 (4) 和 (8),

$$\rho^-(A)\rho^-(A) \subseteq \rho^-(A \cdot A) \subseteq \rho^-(A),$$

因此 $\rho^-(A)$ 为 S 的子半群.

(2) 设 A 为 S 的左理想，则

$$S\rho^-(A) = \rho^-(S)\rho^-(A) \subseteq \rho^-(SA) \subseteq \rho^-(A).$$

因此 $\rho^-(A)$ 也为 S 的左理想.

同理可证当 A 为 S 的右理想、理想和双理想的情形.　□

7.4.4 练习　*设 S 为半群，ρ 为 S 上的完备同余. 则下列各款成立:*

(1) 设 A 为 S 的子半群，则 $\rho_-(A)(\neq \emptyset)$ 也是 S 的子半群;

(2) 设 A 为 S 的左 (右) 理想. 如果 $\rho_-(A) \neq \emptyset$, 则 $\rho_-(A)$ 也为 A 的左 (右) 理想.

7.4.5 定理　设 S 为半群，ρ 为 S 上的同余.

(1) 设 A, B 为 S 的上粗子半群，$AB = BA$, 则 AB 也为 S 的上粗子半群;

(2) 设 A, B 分别为 S 的右和左理想，则

$$\rho^-(AB) \subseteq \rho^-(A) \cap \rho^-(B),\ \rho_-(AB) \subseteq \rho_-(A) \cap \rho_-(B);$$

(3) 设 τ 为 S 上的另一同余且 $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$, A 为 S 的子半群. 则

$$\rho^-(A)\tau^-(A) \subseteq (\rho \circ \tau)^-(A).$$

证　(1) 因为 $AB = BA$, 所以 $ABAB = A^2B^2$. 因为 A, B 均为 S 的上粗子半群，所以

$$\begin{aligned} ABAB &\subset \rho^-(A^2)\rho^-(B^2) \subseteq \rho^-(\rho^-(A))\rho^-(\rho^-(B)) \\ &= \rho^-(A)\rho^-(B) \subseteq \rho^-(AB). \end{aligned}$$

因此

$$\rho^-(AB)\rho^-(AB) \subseteq \rho^-(ABAB) \subseteq \rho^-(\rho^-(AB)) = \rho^-(AB).$$

(2) 设 A 为 S 的右理想， B 为 S 的左理想. 则 $AB \subseteq A \cap B$. 因此

$$\rho^{-}(AB) \subseteq \rho^{-}(A \cap B) \subseteq \rho^{-}(A) \cap \rho^{-}(B).$$

同理可得 $\rho_{-}(AB) \subseteq \rho_{-}(A) \cap \rho^{-}(B)$.

(3) 设 $c \in \rho^{-}(A)\tau^{-}(A)$, 则 $c = ab, a \in \rho^{-}(A), b \in \tau\ \ (A)$. 存在 $x, y \in S$ 使得

$$x \in [a]_\rho \cap A, y \in [b]_\rho \cap A.$$

因此

$$(xy, ay) \in \rho, (ay, ab) \in \tau \Rightarrow (xy, ab) \in \rho \circ \tau,\ xy \in [ab]_{\rho\circ\tau} \cap A.$$

故 $c = ab \in (\rho \circ \tau)^{-}(A)$. 证毕. □

下面我们考虑同态问题.

7.4.6 引理　设 S 和 T 是两个半群, f 是从 S 到 T 的同态映射, $A \subseteq S, A \neq \emptyset$. 则

$$f((\mathrm{Ker}f)^{-}(A)) = f(A).$$

证　因为 $A \subseteq \mathrm{Ker}f^{-}(A)$, 所以 $f(A) \subseteq f(\mathrm{Ker}f^{-}(A))$. 另一方面, 设 $x \in f(\mathrm{Ker}f^{-}(A))$. 存在 $a \in \mathrm{Ker}f^{-}(A)$ 使得 $x = f(a)$, $[a]_{\mathrm{Ker}f} \cap A \neq \emptyset$. 因此存在 $b \in A \cap [a]_{\mathrm{Ker}f}$. 又 $f(a) = f(b)$, 故 $x = f(b) \in f(A)$. 证毕. □

7.4.7 定义　设 S 和 T 是两个半群, ρ 为 S 上的同余. S 到 T 的满同态影射 f 称为 ρ- 相容的, 如果 $\{f([s]_\rho) \mid s \in S\}$ 为 T 的划分.

7.4.8 定理　设 S 和 T 是两个半群, ρ 为 S 上的同余, S 到 T 的满同态映射为 f. 如果 $\mathrm{Ker}f \circ \rho \subseteq \rho$, 则 f 是 ρ- 相容的.

证　设 f 是 ρ- 相容的. $\forall y \in T$, 存在 $x \in S$ 使得 $f(x) = y$, 因此 $y \in f([x]_\rho)$, 故 $\bigcup\limits_{x\in S} f([x]_\rho) = T$. 进一步地, 取 $z \in f([x]_\rho) \cap f([y]_\rho)$. 则存在 $x_1, y_1 \in S$ 使得 $z = f(x_1) = f(y_1)$ 且 $(x, x_1) \in \rho$, $(y, y_1) \in \rho$. 因此 $(x_1, y_1) \in \mathrm{Ker}f$, $(x, y) \in \rho \circ \mathrm{Ker}f \circ \rho \subseteq \rho$. 由此推出 $f([x]_\rho) = f([y]_\rho)$. 以上证明了 $\{f([s]_\rho) \mid s \in S\}$ 确为 T 的一个划分. 设由此划分定义的等价关系为 τ, 则 τ 一定为 T 的同余关系. 事实上, 设 $(a, b) \in \tau$. $\forall c \in T$. 存在 $s, s_1, s_2 \in S$ 使得 $a = f(s), b = f(s_1)$ 且 $(s, s_1) \in \rho, c = f(s_2)$. 因为 f 为 S 到 T 的同态映射, 因此

$$ac = f(s)f(s_2) = f(ss_2), bc = f(s_1)f(s_2) = f(s_1s_2), (ss_2, s_1s_2) \in \rho.$$

由 τ 的定义, $(ac, bc) \in \tau$. 同理可证 $(ca, cb) \in \tau$. 故 τ 为 T 上的同余关系. 证毕.

□

7.4.9 推论　在上定理中, 如果 $\mathrm{Ker}f \subseteq \rho$, 则 f 是 ρ- 相容的.

在定理 7.4.8 中，只要 $\{f([s]_\rho) \mid s \in S\}$ 为 T 的划分，就不难看出它诱导的等价关系 τ 一定是 T 上的同余．这个同余我们以下记为 ρ_f．

7.4.10 定理　设 S 和 T 为两个半群，f 是 S 到 T 的满同态映射，$A \subseteq S$，$A \neq \emptyset$．如果 f 是 ρ- 相容的，则 $f(\rho^{-}(A)) = \rho_f^{-}(f(A))$

证　设 $A \subseteq S$，

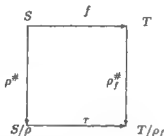
$$\begin{aligned} f(\rho^{-}(A)) &= f(\bigcup\{[a]_\rho \mid a \in A\} \\ &= \bigcup\{f([a]_\rho) \mid a \in A\} \\ &= \bigcup\{[f(a)]_{\rho_f} \mid a \in A\} \\ &= \bigcup\{[f(a)]_{\rho_f} \mid f(a) \in f(A)\} = \rho_f^{-}(f(A)). \end{aligned}$$

证毕．□

在定理 7.4.10 中，如果 $\rho = \mathrm{Ker} f$，则 $\{f([a]_\rho) \mid a \in S\} = \{f(a) \mid a \in S\}$，即 $\rho_f = \iota$(单位同余)．f 当然是 $\mathrm{Ker}f$- 相容的．$f(\mathrm{Ker}f^{-}(A)) = \iota^{-}(f(A)) = f(A)$．因此引理 7.4.6 是定理 7.4.10 的特例．

下面定理说明了一个 ρ- 相容的同态 f 和 ρ 以及它们所诱导的 T 上的同余 ρ_f 之间的关系．

7.4.11 定理　设 S 和 T 是两个半群，ρ 为 S 上的同余，f 是 S 到 T 上的满同态映射且是 ρ- 相容的．设 ρ_f 是 f 和 ρ 在 T 上诱导的同余，则存在从 S/ρ 到 T/ρ_f 的同态满射 τ 使得下图可交换．



证　作映射 $\tau : S/\rho \to T/\rho_f \mid x\rho \to f(x)\rho_f, \forall x \in S$．则

(1)　τ 是可定义的．设 $x\rho = y\rho$，则 $[x]_\rho = [y]_\rho$，因此 $f([x]_\rho) = f([y]_\rho)$，即 $f(x), f(y) \in f([x]_\rho)$．由 ρ_f 的定义得 $(f(x), f(y)) \in \rho_f$．

(2)
$$\begin{aligned} (\forall x, y \in S)\ \tau((x\rho)(y\rho)) &= \tau((xy)\rho) \\ &= f(xy)\rho_f = (f(x)f(y))\rho_f \\ &= (f(x)\rho_f)(f(y)\rho_f) = \tau(x\rho)\tau(y\rho). \end{aligned}$$

可以容易验证以上的同态图是可交换的. 证毕. □

以上我们已知一个半群 S, 再讨论 S 上的粗糙子集. 下面我们换一个角度考虑粗糙半群的定义.

设 (U,R) 为近似空间且 $(U,\circ)$ 是一个代数系统. 如果 R 关于 U 上的运算 "$\circ$" 是左右相容的, 即 $(\forall a,b,c\in U)\ \ (a,b)\in R\Rightarrow (a\circ c,b\circ c),(c\circ a,c\circ b)\in R$, R 称为 U 上的同余. 以下我们讨论带有运算 "$\circ$"(以后 "$\circ$" 有时省略了) 的近似空间 $(U,R,\circ)$, 这里 R 和 "$\circ$" 是相容的. 为了方便起见, 我们称以上的 $(U,R,\circ)$ 为代数近似空间.

7.4.12 定义 设 $(U,R,\circ)$ 为代数近似空间, S 是 U 的非空子集. S 称为关于 U 的*粗糙半群*, 如果 S 满足:

(1) $(\forall x,y\in S)\ \ x\circ y\in R^-(S)$;

(2) $(\forall x,y,z\in S)\ \ (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

7.4.13 定义 设 $(U_1,R_1,\circ_1)$ 与 $(U_2,R_2,\circ_2)$ 为两个代数近似空间. S_1,S_2 分别为它们的粗糙半群. 如果存在 $R_1^-(S_1)$ 到 $R_2^-(S_2)$ 的映射 Φ 满足:

$$(\forall x,y\in R_1^-(S_1))\ \ \Phi(x\circ_1 y)=\Phi(x)\circ_2\Phi(y),$$

称 Φ 为粗糙半群 S_1 到粗糙半群 S_2 的*粗糙同态映射*. 如果 Φ 是单射和满射, 称 S_1 和 S_2*粗糙同构*.

设 $(U,R,\circ)$ 为代数近似空间, S 为其上的粗糙半群, 记 $S/R:=\{[x]_R\mid x\in S\}$. 我们可以在商集 U/R 上定义二元运算 "$*$":

$$(\forall [a]_R,[b]_R\in U/R)\ \ [a]_R*[b]_R:=[a\circ b]_R.$$

不难验证以上定义是可行的.

7.4.14 练习 *设 (U,R) 为近似空间, 设 $\overline{R}$ 是商集 U/R 上的等价关系. 存在 U 上的等价关系 R_1, $R\subseteq R_1$ 且*

$$R_1=\{(x,y)\in U\times U\mid ([x]_R,[y]_R)\in\overline{R}\}.$$

基于练习 7.4.14, $\overline{R}$ 有时也记为 R_1/R. 以下统称 $(U/R,\overline{R},*)$ 称为 U 上同余关系 R 的*商代数近似空间*.

7.4.15 定理 设 S 是 $(U,R,\circ)$ 的粗糙半群. 则 S/R 是商代数近似空间 $(U/R,\overline{R},*)$ 的粗糙半群.

证 $\forall [x]_R,[y]_R\in S/R$, 存在 $x_1,y_1\in S$ 使得 $[x]_R=[x_1]_R$, $[y]_R=[y_1]_R$. 因此

$$[x]_R*[y]_R=[x_1]_R*[y_1]_R=[x_1\circ y_1]_R\in R^-(S)/R.$$

又 $\overline{R}^-(S/R)=\{X\in U/R\mid [X]_{\overline{R}}\cap S/R\neq\emptyset\}$. 设 $X\in R^-(S)/R$, 则 $X=[x]_R$ 且 $x\in R^-(S)$, 即 $[x]_R\cap S\neq\emptyset$. 因此存在 $s\in S$ 使得 $[x]_R=[s]_R$. 由上 $R^-(S/R)$ 的定

义 $X \in R^-(S)/R$ 意味着 $X = [s]_R$, 即 $X \in [X]_{\overline{R}} \cap S/R$, 因此 $X \in \overline{R}^-(S/R)$. 以上证明了 $[x]_R * [y]_R \in \overline{R}^-(S/R)$. 另一方面, 因为 S 关于 "∘" 有结合律, 因此 S/R 在 $(U/R, \overline{R}, *)$ 中关于 "*" 也具有结合律. 综上所述 S/R 是 $(U/R, \overline{R}, *)$ 的粗糙半群. 证毕. □

在定理 7.4.15 中, 如果 $\overline{R} = \iota$(单位同余或恒等同余), 则 $\overline{R}^-(S/R) = \overline{R}_-(S/R) = S/R = R^-(S)/R$, 这时 $(S/R, *)$ 是半群.

7.4.16 定理　设 $(U, R, \circ)$ 为代数近似空间, $(U/R, \overline{R}, *)$ 为其商代数近似空间. 又设 S 和 S/R 分别为 U 和 U/R 上的粗糙半群. 则 S 和 S/R 存在粗糙同态映射.

证　定义 $R^-(S)$ 到 $\overline{R}^-(S/R)$ 的映射 $\Phi: x \to [x]_R, \forall x \in R^-(S)$.

(1) Φ 是映射. 设 $x \in R^-(S)$, 存在 $s \in S$ 使得 $[x]_R = [s]_R$, 即 $[x]_R \cap S \neq \emptyset$, 记 $[s]_R$ 为 X, $X \in [X]_{\overline{R}} \cap S/R$, 因此 $[X]_{\overline{R}} \cap S/R \neq \emptyset$, 即 $X \in \overline{R}^-(S/R)$.

(2) Φ 保运算.

$$
\begin{aligned}
(\forall x, y \in R^-(S))\quad \Phi(xy) &= [x \circ y]_R \\
&= [x]_R * [y]_R = \Phi(x) * \Phi(y).
\end{aligned}
$$

证毕. □

7.4.17 注　定理 7.4.16 中, 当 $\overline{R} = \iota$ 时, Φ 为满射. 事实上, $X \in \overline{R}^-(S/R)$, $[X]_{\overline{R}} \cap S/R \neq \emptyset$, 存在 $s \in S, [s]_R \subseteq [X]_{\overline{R}}$. 如果 $\overline{R} = \iota$. 则 $[X]_{\overline{R}} = X = [s]_R$. 因此 $\Phi(s) = [s]_R = X$.

本节最后我们关注一下商半群中的粗糙子集. 设 ρ 为半群 S 上的同余, $A \subseteq S$. 则 A 关于 ρ 的上 (下) 近似其实就是集合 $\{X \in S/\rho \mid X \subseteq A\}$ $(\{X \in S/\rho \mid X \cap A \neq \emptyset\})$ 中每个等价类的并, 在不至于混淆的情况下, 我们仍分别记为 $\rho_-(A)$ 和 $\rho^-(A)$.

7.4.18 定理　设 A 为半群 S 的子半群, 则 $\rho^-(A)$ 也为 S/ρ 的子半群.

证　A 为 S 的子半群, $A \neq \emptyset$. 设 $x \in A$, 则 $[x]_\rho \cap A \neq \emptyset$, 因此 $[x]_\rho \in \rho^-(A)$. 故 $\rho^-(A) \neq \emptyset$.

设 $X, Y \in \rho^-(A)$, 则 $X \cap A$ 和 $Y \cap A$ 均非空. 取 $a \in X \cap A, b \in Y \cap A$, 则 $ab \in XY \cap A$. 又 $X = [a]_\rho$, $Y = [b]_\rho$, 所以 $XY = [a]_\rho[b]_\rho = [ab]_\rho \in S/\rho$. 由上说明 $XY \in \rho^-(A)$, 因此 $\rho^-(A)$ 是商半群 S/ρ 的子半群. 证毕. □

7.4.19 练习　设 A 为半群 S 的子半群, ρ 为 S 上的完备同余. 如果 $\rho_-(A)$ 非空, 则 $\rho_-(A)$ 为 S/ρ 的子半群.

进一步地, 我们可以把 A 换成 S 的左 (右) 理想、双理想、理想等, 再考查 $\rho^-(A)$ 和 $\rho_-(A)$ 的性质, 我们仅给出一种情况, 其余读者可以仿照推出.

7.4.20 定理　设 A 为半群 S 的左理想, ρ 为 S 上的同余. 则 $\rho^-(A)$ 为 S/ρ 的左理想.

证　类似于定理 7.4.18 的证明，$\rho^-(A) \neq \emptyset$, 且 $\rho^-(A)$ 为 S/ρ 的子半群. 任取 $X \in \rho^-(A)$, 则 $X \cap A \neq \emptyset$, 因此 $X = [a]_\rho, a \in A$. 对任意 $Y \in S/\rho, Y = [y]_\rho, y \in S$, $YX = [ya]_\rho$. 因为 A 为 S 的左理想，所以 $ya \in [ya]_\rho \cap A (\neq \emptyset)$ 从而 $YX \in \rho^-(A)$, 即 $\rho^-(A)$ 为 S/ρ 的左理想. 证毕. □

7.5 评　述

设 U 为有限集，R 为 U 上的等价关系. 则 $(2^U, \cap, \cup, \sim)$ 是一个完备的 Boole 代数而且是原子的，原子为 $\{x\}, \forall x \in U$. 在此基础上，在 2^U 上加入两个一元算子 $\overline{\mathrm{apr}}$, $\underline{\mathrm{apr}}$, 新的 $(2,2,1,1,1,0,0)$ 代数系统 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \overline{\mathrm{apr}}, \underline{\mathrm{apr}}, \emptyset, U)$ 称之为 Pawlak 粗糙代数 (参见文献 [129~132, 140~141]). $\overline{\mathrm{apr}}, \underline{\mathrm{apr}}$ 这一对一元算子其实为 2^U 上闭包算子和内部算子，它们能在 U 上诱导相同的拓扑 $\mathcal{J}$ 且 $(U, \mathcal{J})$ 中每个开集是闭集 [127]. Pawlak 粗代数引入以后，人们从很多方面来推广 Pawlak 粗代数. 首先，在 (U, R) 中，R 不一定是等价关系. 设 R 为 U 上的一般二元关系，γ 为 U 到 2^U 的映射

$$(\forall x \in U)\ \ \gamma(x) := \{y \in U \mid (x, y) \in R\},$$

$\gamma(x)$ 称为 x 的 R- 邻域 [48], $A \subseteq U$, 定义

$$\underline{\mathrm{apr}}_R(A) = \{x \in U \mid \gamma(x) \subseteq A\},\ \ \overline{\mathrm{apr}}_R(A) = \{x \in U \mid \gamma(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

则 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{\mathrm{apr}}, \overline{\mathrm{apr}})$ 称之为粗代数 [132]. 我们赋予二元关系 R 一些附加条件可以定义出一系列粗代数系统 [140]. 例如，R 如果为串二元关系，即 $(\forall x \in U)\ (\exists y \in U)\ (x, y) \in R$, 或者说 $(\forall x \in U)\ \gamma(x) \neq \emptyset$, 则 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{\mathrm{apr}}_R, \overline{\mathrm{apr}}_R)$ 称之为串粗代数. 串粗代数与基本集指派 (basic set assignment) 是一一对应的 [109,110,133]. Pawlak 粗代数推广的第二种途径，我们称之为区间代数 [133](Interval Algebra). 设 W, U 为两个有限集，$R \subseteq W \times U$ 为从 W 到 U 的二元关系，由 R 可以确定一个多值映射

$$(\forall w \in W)\ \gamma(w) = \{x \in U \mid (w, x) \in R\},$$

类似于上近似和下近似的定义，我们可以定义

$$\underline{\mathrm{apr}}_R(A) = \{w \in W \mid \gamma(w) \subseteq A\},\ \overline{\mathrm{apr}}_R(A) = \{w \in W \mid \gamma(w) \cap A \neq \emptyset\}.$$

设 $\forall w \in W, \gamma(w) \neq \emptyset$, $(2^W, 2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{\mathrm{apr}}_R, \overline{\mathrm{apr}}_R)$ 就是一个新的粗代数系统，是定义在泛系 U 和 V 之上的串粗代数.

如果 R 是 U 上的等价关系，则 $\{[x]_R \mid x \in U\}$ 是 U 上的一个划分，同时也是 U 中元素的一个覆盖. 由此给我们启示，设 $C = \{C_t \mid C_t \in 2^U, t \in T\}$ 为 U 的有限

子集簇，如果 $\bigcup_{t\in T} C_t = U$, C 称为 U 的覆盖 [87]. 如果 C 为 U 的覆盖，(U,C) 称为覆盖近似空间 [47]. 在该近似空间上可以类似以上的方式引入一对近似算子 $\underline{\text{apr}}$ 和 $\overline{\text{apr}}$ 使得 $(2^U, C, \cap, \cup, \sim, \underline{\text{apr}}, \overline{\text{apr}})$ 构成一个新的粗代数系统.

Pawlak 粗代数的基础是 Boole 代数 $(2^U, \cap, \cup, \sim)$. 抽象地，我们将它换成 Fuzzy 格 $(L, \vee, \wedge, \sim)$, 类似地我们可以引入基于 Fuzzy 格 L 上的粗代数 $(L, \vee, \wedge, \sim, \underline{\text{apr}}, \overline{\text{apr}})$ 称之为 Pawlak 代数 [49].

Pawlak 粗代数的研究的另一个方向是给出各种粗代数模型的公理化表示，公理的优化，约简等等 [47,142].

Pawlak 代数系统和其他代数系统也是密切相关的. 例如 Heyting 代数，Nelson 代数以及 Stone 代数等. 事实上，我们可以在 Pawlak 粗代数系统上引入粗相等的概念，2^U 中的元素以粗相等关系分类，记所有类集为 $\Re^0$, 则 $\Re^0$ 关于相关的交和并运算以及伪补就构造 Stone 代数 [140].

粗糙集理论的研究是粗糙集这门学科研究的重要方面，以上从算子代数的观点看粗糙理论以及与之相关的拓扑学、格与布尔代数相关理论. 当然与数理逻辑以及模糊数学的联系就更加广泛，我们从 Dubois 和 Prade 提出的模糊粗集代数统一可见一斑 [21]. 至于粗集与纯数学的结合，例如和逻辑 [46]、和群 [14] 及半群 [38,52] 等应该是纯数学的领域. 是给纯数学研究提供了一个良好的思路和背景，它们的结合必将产生很多新的有良好应用背景的代数分支，这些研究在国内仅仅是起步，想成为一门完善的理论学科还有一段漫长的路要走.

参考文献

[1] Ahsan J, Saifullah K, Farid Khan M. Semigroups characterized by their fuzzy ideals. Fuzzy Syst. & Math., 1995, 9(1): 29~32

[2] Ajmal N and Thomas K V. A complete study of the lattice of fuzzy congruences and fuzzy nomal subgroups. Inform. Sci., 1995, 82: 197~218

[3] Ajmal N. The lattice of fuzzy normal subgroups is modular. Inform. Sci., 1995, 83: 199~209

[4] Ajmal N and Thomas K V. The lattice of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups. Inform. Sci., 1994, 76: 1~11

[5] Al-Thukair F A. Fuzzy congruence pairs of inverse semigroups. FSS, 1993, 56: 117~122

[6] Aparna.J. Tom head's join structure of fuzzy subgroups. FSS, 2001, 125· 191~200

[7] Anthony J M and Sherwood. Fuzzy group redefined. J. Math. Anal. Appl., 1979, 69: 124~130

[8] Biswas R and Nanda S. Rough groups and rough subgroups. Bull. Pulish Acad. Sci. Math., 1994, 42: 251~254

[9] Bogdanovic S. Semigroups with a System of Subsemigroups. Novi Sad, 1985

[10] Biacino L and Gerla G. Closure systems and *L*-subalgebras. Inform. Sci. 1984, 33: 181~195

[11] Chowdhury G. Congruences on fuzzy inverse semigroups. FSS, submitted

[12] Chakraborty M K and Das M. On fuzzy equivalent I. FSS, 1983, 11: 185~193

[13] Chakraborty M K and Das M. On fuzzy equivalent II. FSS, 1983, 12: 299~307

[14] Calais J. Demi-groupes quasi-inversifs. C. R. Acad. Sci. Paris. 1961, 252: 2357~2359

[15] Clifford A H and Preston G B. The Algebraic Theory of Semigroups (Vol.I) Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1961

[16] Das P. Fuzzy regular and inverse subsemigroups. FSS, 1997, 91: 99~105

[17] Dib K A and Galhum N. Fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in fuzzy semigroups. FSS, 1997, 92: 103~111

[18] Das P. Lattice of fuzzy congruences in inverse semigroups. FSS, 1997, 91: 399~480

[19] Das P. Fuzzy multiplication semigroup. FSS, 1999, 105: 171~176

[20] Dudek W A. Fuzzification of n-ary groupoids. Quasigroups and Related Systems, 2000, 7: 45~66

[21] Dubois D and Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough set. Int. J. Gen Syst., 1990, 17· 191~209

[22] Gupta K C and Gupta R K Fuzzy equivalent relation redefined FSS, 1996, 79: 227~233

[23] Goguen J A. L-fuzzy Sets. J. Math. Anal. Appl., 1967, 18: 145~174

[24] 郭小江. Fuzzy 子半群的积. 宜春师专学报, 1994, 22: 251~254

[25] Howie J M Fundamentals of Semigroups Theory. N Y: Oxford University Press Inc., 1995

[26] Iwinski T B. Algebraic approach to rough sets. Bull. PAS, 1987, 35: 673~683

[27] Iseki K. A characterization of regular semigroups Proc. Japan Acad. 1965, 32. 676~677

[28] Jun B Y, Lee S M, Kim K H. Fuzzy Gamma-ideal extensions in Gamma-semigroups J. Fuzzy Math., to appear

[29] Kehayopulu N and Xie X-Y, Tsingles M. A characterization of prime and semiprime ideals of semigroups in terms of fuzzy subsets. Soochow J. Math., 2001, 27(2), 139~144

[30] Kuroki N On fuzzy semigroups. Inform. Sci., 1991, 53· 203~236

[31] Kuroki N. On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups FSS, 1981, 5: 203~215

[32] Kuroki N. On fuzzy semiprime ideals in semigroups. FSS, 1982, 8: 71~79

[33] Kuroki N. Fuzzy bi-ideals in semigroups. Comment. Math. Univ. St. Paul., 1980,80: 17~21

[34] Kuroki N. Fuzzy semiprime quasi-ideals in semigroups. Inform. Sci , 1993, 75: 201~211

[35] Kuroki N. Fuzzy congruence on inverse semigroups. FSS, 1997, 87:335~340

[36] Kuroki N. Fuzzy congruences on T*-pure semigroups. Inform. Sci., 1995, 84: 239~246

[37] Kuroki N. Fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups. Inform. Sci., 1992, 60: 247~259

[38] Kuroki N. Rough ideals in semigroups. Inform. Sci., 1997, 100: 139~163

[39] Kuroki N. Fuzzy generated bi-ideals in semigroups. Inform Sci , 1992, 66: 235~243

[40] Kuroki N, Wang P P. The lower and upper approximations in a fuzzy group. Inform. Sci., 1996, 90: 203~220

[41] Kehayopulu N and Tsingles M A note on fuzzy sets of groupoids-semigroups. Scientiae Mathematicae, 2000, 3(2): 247~250

[42] Kaufmann A. Introduction to the theory of Fuzzy Subsets. Vol 1. New York. Academic Press, 1975

[43] Kim J P and Bae D R. Fuzzy congruences in groups. FSS, 1997, 85: 115~120

[44] Kim J -G. Lattice of fuzzy subgroupoids, fuzzy submonoids, and fuzzy subgroups. Inform. Sci., 1996, 91: 77~93

[45] Liu W J. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. FSS, 1982, 8: 133~139

[46] Lin T Y. A rough logic formalism for fuzzy controllers: A hard and soft comuting view. Inter. J. Approx. Reason. , 1996, 15: 395~414

[47] Lin T Y and Liu Q. Rough approximate operators· axomatic rough set theory In: Ziarko W P ed. Rough Sets, Fuzzy set and knowledge discovery. London. Springer-Verlag, 1994. 256~260

[48] Lin T Y Neighborhood systems : A qualitative theory for fuzzy and rough sets. In: Proceedings of 2nd Joint Conference on Information Science, Wrightsville Beach, NC,

1995, 255~258

[49] 刘文奇. Pawlak 代数及其性质. 模糊系统与数学, 1999, 13: 78~84

[50] 刘清, 黄兆华, 姚力文. Rough 集理论: 现状与前景. 计算机科学, 1997, 24: 1~5

[51] 刘健勤. 粗糙集理论及其最新进展. 计算技术与自动化, 1998, 17: 43~48

[52] 李德玉, 笛夺谦. 粗糙半群的性质. 计算机科学 (增), 2001, 28: 42~43

[53] Li Y. H and Chen C. X. Fuzzy congruence pairs on regular semigroup. J. Fuzzy Math., 2003, 11: 659~669

[54] Li Y. H and Chen C. X. Homomorphisms between two sets of fuzzy subsemigroups. 数学研究与评论, 2003, 23(4): 615~622

[55] Li Y. H and Chen C. X. Fuzzy group congruences on a semigroup. 模糊系统与数学, 2002(4), 16(4): 57~62

[56] Li Y. H and Xu C. X. 正则半群的模糊同余三元组. 西安交通大学学报, 2002, 26(4): 418~421

[57] 李勇华, 徐成贤, 陈德刚. 纯正半群上的模糊核正规系. 工程数学学报, 2003, 20(6): 85~89

[58] 李勇华, 徐成贤. 正则半群上的模糊同余的模糊核. 工程数学学报, 2002, 19(3): 118~122

[59] Lajos S. On generalized bi-ideals in semigroups. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 20, Algebraic Theory of Semigroups, (G.Pollak, Ed.), North-Holland, 1979, 335~340

[60] Lajos S. A note on completely regular semigroups. Acta Sci. Math. (Szeged) 1967, 28: 261~265

[61] Lajos S. On (m,n)-ideals in regular duo semigroups. Acta Sci. Math. (Szeged) 1970, 31: 179~180

[62] Lajos S. A note on semilattices of groups. Acta Sci. Math. (Szeged) 1972, 33: 315~317

[63] Lajos S. A characterization of semilattices of left groups. Mat. Vesnik. 1972, 9: 363~364

[64] Lajos S. Theorems on $(1,1)$-ideals in semigroup II. Dept. of Math. Kar Marx Univ. of Economics, Budapest, 1975

[65] Mo Z W and Wang X P. Fuzzy ideals generated by fuzzy sets in semigroups. Inform. Sci., 1995, 86: 203~210

[66] Mo Z W and Wang X P. On pointwise depiction of fuzzy regularity of semigroups. Inform. Sci., 1993, 74: 265~274

[67] Murali V. Fuzzy equivalent relations. FSS, 1989, 30: 155~163

[68] Murali V. Fuzzy congruence relations. FSS, 1991, 41: 359~369

[69] Mclean R G and Kummer H. Fuzzy ideals in semigroups. FSS, 1992, 48: 137~140

[70] Makamba B B and Murali V. Normality and congruences on fuzzy subgroups. Inform. Sci., 1992, 59: 121~129

[71] Mordeson J N. Rough set theory applied to (fuzzy) ideal theory. FSS, 2001, 121: 315~324

[72] Mordeson J N. L-subspaces and L-subfields. Lecture Notes in Fuzzy Mathematics and Computer Science, Creighton University, 1996

[73] Negoita C V and Ralescu D A. Applications of Fuzzy Sets to System Analysis. New York: Wiley, 1975
[74] Nemitz W C. Fuzzy relations and fuzzy functions. FSS, 1986, 19: 177~191
[75] Negoita C V and Ralescu D A. Representative theorems for fuzzy concepts. Kybernetes, 1975, 4: 169~174
[76] Novotny M and Pawlak Z. Characterigation of rough top equalities and rough bottorn equalitres. Bull. PAS, 1985, 33: 91~97
[77] Novotny M and Pawlak Z. On rough equalities. Bull. PAS, 1985, 33: 99~104
[78] Obtulowicz A. Rough sets and Heyting alegbra valued sets. Bull. PAS. 1987, 35: 667~671
[79] Petrich M. Inverse Semigroups. New York: Wiley, 1984
[80] Pawlak Z. Rough sets. Inter. J. Computer and Inform. Sci., 1982, 11: 341~356
[81] Pawlak Z. Rough sets: Algebraic and topological approach. ICS PAS Reports, 1982, No. 482, 5~31
[82] Pawlak Z. Some remarks on rough sets. Bull. Pas, 1985, 33: 567~572
[83] Pawlak Z. Information systems: theoretical foundations. Inform. Syst. , 1981, 6: 205~218
[84] Pawlak Z. Roungh sets and multiexpert systems. Bull. PAS, 1985, 33: 499~504
[85] Pawlak Z. On rough functions. Bull. PAS, 1987, 35: 249~251
[86] Pawlak Z. On rough relations. Bull. PAS, 1986, 34: 587~590
[87] Pomykala J A. Approximation operations in approximation Space. Bull. PAS, 1987, 35: 653~665
[88] 彭祖赠，孙韫玉. 模糊数学及其应用. 武汉：武汉大学出版社， 2002
[89] 岑嘉评，陈得刚，吴从炘. 半群的模糊拟对称理想和它的根. 模糊系统与数学， 1999, 13(1): 1~3
[90] Ray S. The lattice of all idempotent fuzzy subsets of a groupoid. FSS, 1998, 96: 239~245
[91] Rosenfeld A. Fuzzy groups. J. Math. Anal. Appl., 1971, 35: 512~517
[92] Rosenfeld A. Fuzzy graphs, in: L.A. Zadel et al., Eds., Fuzzy Stes and their Application to Congnitive and Decision Process. New York: Academic Press, 1975, 125~149
[93] Roventa E and Spircu T. Groups operating on fuzzy sets. FSS, 2001, 120: 543~548
[94] Shen J. On fuzzy regular subsemigroups of a semigroup. Inform. Sci., 1990, 51: 111~120
[95] Sanchez E. Resolution of compositive fuzzy relation equation. Inform. & Control, 1976, 30: 38~48
[96] Samhan M A and Ahsanullah T M G. Fuzzy congruences on groups and rings. Internat. J. Math. & Math. Sci., 1994, 17(3): 469~474
[97] Samhan M. Fuzzy congruences on semigroups. Inform. Sci., 1993, 74: 165~175
[98] Szász G. Semigroups with idempotent ideals. Publ. Math. Debrecen, 1974, 21: 115~117
[99] 谭宜家. 正则半群上的 L-Fuzzy 同余关系与格林关系. 福州大学学报 (自), 1997, 25(6): 1~5

[100] 谭宜家. 半群上的 L-Fuzzy 同余关系. 福州大学学报 (自), 1994, 22(5): 8~13
[101] 谭宜家. Fuzzy 半群中的 Fuzzy 格林关系. 福州大学学报 (自), 1996, 24(2): 1~5
[102] 谭宜家. Fuzzy 半群中的 Fuzzy 素理想. 模糊系统与数学, 2001, 15(3): 50~54
[103] 谭宜家. Fuzzy 半群中的 Fuzzy 理想. 模糊系统与数学, 1995, 9(2): 59~64
[104] 谭宜家. 关于 Fuzzy 正则半群. 模糊系统与数学, 11996, 10(1): 55~59
[105] Tan Y J. Fuzzy congruences on a regular semigroup. FSS, 2001, 117: 447~453
[106] Wang X P, Mo Zhiwen, Liu W J. Fuzzy ideals generated by fuzzy point in semigroups. 四川师范大学学报 (自), 1992, 15(4): 17~24
[107] Wu Mingfen. The fuzzy congruence extension property in groups. JP Jour. Algebra, Number Theory & Appl., to appear
[108] Wang X P and Liu Wangjiu. Fuzzy regular subsemigroups in semigroups. Inform. Sci., 1993, 68: 225~231
[109] Wong S K M, Wang L S, Yao Y Y. On modelling uncertainty with structures. Comput. Intell., 1995, 11: 406~426
[110] Wong S K M. On modelling uncertainly with interval structures. Comput. Intell., 1995, 11: 406~426
[111] 王国胤. Rough 集理论与知识获取. 西安: 西安交通大学出版社, 2001
[112] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论. 西安: 陕西师范大学出版社, 1996
[113] 王珏, 苗夺谦, 周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述. 模式识别与人工智能, 1996, 9: 337~344
[114] 王志海, 胡可云, 胡学钢, 徐本柱, 刘宗田, 张冀成. 基于粗糙集合理论的知识发现综述, 模式识别与人工智能, 1998, 11: 176~183
[115] Xie X -Y. Fuzzy Rees congruences on semigroups. FSS, 1999, 102: 353~359
[116] Xie X -Y. On prime, quasi-prime, weakly quasi-prime fuzzy left ideals of semigroup. FSS, 2001,123: 239~249
[117] Xie X -Y. Fuzzy congruences extensions in semigroups. 数学进展, 2001, 30: 218~230
[118] Xie X -Y. On Fuzzy ideals in semigroups. J. Fuzzy Math., 1999, 7(2): 357~365
[119] Xie X -Y. On prime fuzzy ideals of a semigroups. J. Fuzzy Math., 2000, 8(4): 231~241
[120] Xie X -Y, Xie Linquan. On completely prime, prime fuzzy ideals in semigroups. 模糊系统与数学, 2000, 14(2): 9~14
[121] Xie X -Y. Fuzzy congruences on Gamma-semigroups. 模糊系统与数学, 1999, 13(2): 57~63
[122] Xie X -Y and Wu Mingfen. A characterization of prime fuzzy ideals of semigroups. 模糊系统与数学 (增), 1999, 13: 29~31
[123] Xie X -Y. Fuzzy ideals extensions in semigroups. Kyungpook Math. J., 2002, 42(1): 39~49
[124] Xie X -Y. Fuzzy ideals extensions of semigroups. Soochow J. Math., 2001, 27(2): 125~138

[125] 谢祥云，吴明芬. Pawlak 粗代数研究综述. 计算机科学，2002, 29(5)：76~79
[126] 谢祥云. 序半群引论. 北京：科学出版社，2001
[127] 熊金城. 点集拓扑学讲义. 北京：人民教育出版社，1981
[128] Yeh R T. Toward an algebraic theory of fuzzy relational systems. Proc. Int. Congr. Cybern., Namur, Belgium, 1973, 205~223
[129] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universe. Ineter. J. Approx. Reason., 1996, 15: 291~317
[130] Yao Y Y. A comparative study of fuzzy sets and rough sets. J. Inform. Sci., 1998, 109: 227~241
[131] Yao Y Y and Lingras P J. Interpretations of belief functions in the theory of rough sets. Inform, Sci., 1998, 104: 81~106
[132] Yao Y Y and Lin T Y. Generaligation of rough sets using model logic. Automat. Soft Comput., 1996,2:103~120
[133] Yao Y Y, Wong S K M, Wang L S. A non-numeric approach to uncertain reasoning. Int. J. Gen. Syst., 1995, 23: 343~359
[134] Yao Y Y. Constructive and Algebraic Methods of the Theory of Rogh Sets. Information Sci., 1998, 109(1-4): 21~47
[135] Zadeh L A. Fuzzy Sets. Inform. & Control, 1996, 8: 338~353
[136] Zadeh L A. Similimity relations and fuzzy ordering. Inform. Sci., 1971, 3: 117~200
[137] Zhang Chuanzhi. Fuzzy complete inner-unitary subsemigroups and fuzzy group congruences on a regular semigroup. FSS, 2000, 112: 327~332
[138] Zhang Chuanzhi. Group congruences on a regular semigroups. J. Shandong Univ., 1995, 4: 376~384
[139] 曾黄麟. 粗集理论及其应用 —— 关于数据推理的新方法. 重庆：重庆大学出版社，1998
[140] 张文修，吴伟志，梁吉业，李德玉. 粗糙集理论与方法. 北京：科学出版社，2001
[141] 张文修，吴伟志. 粗糙集理论介绍和研究综述. 模糊系统与数学，2000, 14: 1~12
[142] 祝峰，何华灿. 粗集的公理化. 计算机学报，2000, 23: 330~333
[143] 邹祥福. 模糊半群上的模糊同余及其扩张. 模糊系统与数学，2003, 17(3):68~71